

با ایران توشه
یک قدم جلوتر
باش!



کنکور

آزمون های آزمایشی

گام به گام

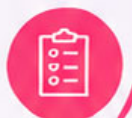
جزوه و نمونه سوال



ایران توشه

توشه ای برای موفقیت

ایران توشه، مرجع دانلود فایل های کمک آموزشی دانش آموزان و کنکوری ها



دانلود رایگان آزمون های آزمایشی
قلمچی، خیلی سبز، گاج و ...



دانلود رایگان گام به گام تمامی دروس



دانلود رایگان نمونه سوالات امتحانی
(نوبت اول و دوم) و امتحانات نهایی



دانلود رایگان جزوه های کمک آموزشی
و شب امتحانی

همه چیز
برای موفقیت
تو!

Google

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه

کافیست هر فایلی که نیاز دارید
را در گوگل به این صورت جستجو کنید:

فایل مورد نیاز + ایران توشه

مثال:

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه



irantooshe.ir



t.me/irantooshe





گام به گام ریاضی هشتم

فصل اول

عنوان فصل: اعداد صحیح و گویا

از صفحه ۱ تا صفحه ۲۰ کتاب

در این فایل پاسخ فعالیت‌ها، کارهای کلاسی، تمرین‌ها و پرسش‌های فصل اعداد صحیح و گویا آمده است. مباحث فصل: گفت‌وگو، یادآوری اعداد صحیح، اعداد گویا، دو مسئله واقعی کاربردی

تهیه شده در ایران توشه، توشه ای برای موفقیت

irantooshe.ir

فهرست پرسش‌ها

۱	صفحه ۰۴ تمرین — یادآوری عددهای صحیح — ۱	۶
۲	صفحه ۰۴ تمرین — یادآوری عددهای صحیح — ۲	۶
۳	صفحه ۰۴ تمرین — یادآوری عددهای صحیح — ۳	۷
۴	صفحه ۰۴ تمرین — یادآوری عددهای صحیح — ۴	۸
۵	صفحه ۰۵ تمرین — یادآوری عددهای صحیح — ۵	۹
۶	صفحه ۰۵ تمرین — یادآوری عددهای صحیح — ۶	۱۰
۷	صفحه ۰۶ تمرین — یادآوری عددهای صحیح — ۷	۱۰
۸	صفحه ۰۶ تمرین — یادآوری عددهای صحیح — ۸	۱۱
۹	صفحه ۰۶ تمرین — یادآوری عددهای صحیح — ۹	۱۲
۱۰	صفحه ۰۷ تمرین — یادآوری عددهای صحیح — ۱۰	۱۳

۱۱ صفحه ۷۰ تمرین — یادآوری عددهای صحیح — ۱۱ ۱۴

۱۲ صفحه ۸۰ تمرین — یادآوری عددهای صحیح — ۱۲ ۱۵

۱۳ صفحه ۹۰ تمرین — یادآوری عددهای صحیح — ۱۳ ۱۷

۱۴ صفحه ۱۰۰ تمرین — یادآوری عددهای صحیح — ۱۴ ۱۸

۱۵ صفحه ۱۱۰ تمرین — عددهای گویا — ۱ ۲۰

۱۶ صفحه ۱۱۰ تمرین — عددهای گویا — ۲ ۲۰

۱۷ صفحه ۱۱۰ تمرین — عددهای گویا — ۳ ۲۱

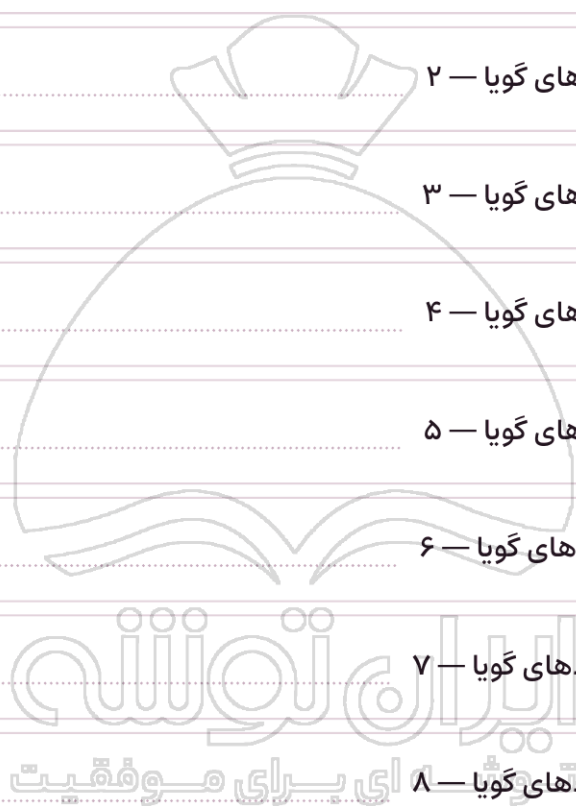
۱۸ صفحه ۱۱۰ تمرین — عددهای گویا — ۴ ۲۱

۱۹ صفحه ۱۱۰ تمرین — عددهای گویا — ۵ ۲۱

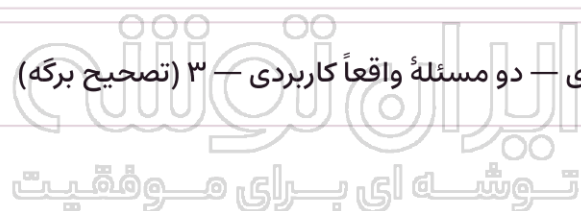
۲۰ صفحه ۱۲۰ تمرین — عددهای گویا — ۶ ۲۲

۲۱ صفحه ۱۳۰ تمرین — عددهای گویا — ۷ ۲۳

۲۲ صفحه ۱۳۰ تمرین — عددهای گویا — ۸ ۲۳



۲۳	صفحه ۱۳۰ تمرین — عددهای گویا — ۹	۲۴
۲۴	صفحه ۱۳۰ تمرین — عددهای گویا — ۱۰	۲۵
۲۵	صفحه ۱۴۰ تمرین — عددهای گویا — ۱۱	۲۵
۲۶	صفحه ۱۴۰ تمرین — عددهای گویا — ۱۲	۲۵
۲۷	صفحه ۱۴۰ تمرین — عددهای گویا — ۱۳	۲۶
۲۸	صفحه ۱۵۰ تمرین — عددهای گویا — ۱۴	۲۷
۲۹	صفحه ۱۵۰ پروژه — عددهای گویا — ۱۵	۲۷
۳۰	صفحه ۱۶۰ تمرین — عددهای گویا — ۱۶	۲۸
۳۱	صفحه ۱۷۰ مسئله کاربردی — دو مسئله واقعاً کاربردی — ۱ (مالیات بر حقوق)	۳۰
۳۲	صفحه ۱۸۰ مسئله کاربردی — دو مسئله واقعاً کاربردی — ۲ (تقسیم ارث و مالیات بر ارث)	۳۱
۳۳	صفحه ۲۰۰ مسئله کاربردی — دو مسئله واقعاً کاربردی — ۳ (تصحیح برگه)	۳۳



۱. الف) حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$۳ \times ۴ \div ۲ \times ۸ \div ۱۰ + ۳ - ۷ - ۲۰$$

ب) خلیل محاسبه‌های بالا را این‌گونه انجام داد:

$$۱۰ + ۳ - ۷ - ۲ = ۱۰ + ۳ + (-۷) + (-۲) = ۴۰$$

$$۳ \times ۴ \div ۲ \times ۸ = ۳ \times ۴ \times ۱/۲ \times ۸ = ۴۸۰$$

درباره روش خلیل بحث کنید.

الف) در عبارت‌هایی که فقط جمع و تفریق (یا فقط ضرب و تقسیم) دارند، محاسبه از چپ به راست انجام می‌شود.

○ $۱۰ + ۳ - ۷ - ۲ = ۶$ ؛ $۱۳ - ۷ = ۶$ و $۶ - ۲ = ۴$. پس حاصل ۴ است.

○ $۳ \times ۴ \div ۲ \times ۸ = ۱۲$ ؛ $۳ \times ۴ = ۱۲$ ، $۱۲ \div ۲ = ۶$ و $۶ \times ۸ = ۴۸$. پس حاصل ۴۸ است.

ب) خلیل «تفریق» را به «جمع با قرینه عدد» و «تقسیم» را به «ضرب در معکوس عدد» تبدیل کرده است: $a - b = a + (-b)$ و $a \div b = a \times 1/b$. این تبدیل‌ها درست‌اند و هر دو نتیجه با محاسبه قسمت (الف) یکی است (۴ و ۴۸).

فایده روش او این است که جمع و ضرب خاصیت جابه‌جایی و شرکت‌پذیری دارند، پس پس از تبدیل می‌توان جمله‌ها را به هر ترتیب و گروه‌بندی که راحت‌تر است جمع یا ضرب کرد (مثلاً $۳ \times ۴ \times ۸ \times ۱/۲ = ۹۶ \times ۱/۲ = ۴۸$). ولی تفریق و تقسیم جابه‌جایی ندارند (مثلاً $۳ - ۷ \neq ۷ - ۳$) و بدون این تبدیل جابه‌جا کردن جمله‌ها خطاست. بنابراین روش خلیل کم‌خطا تر است و اشتباه در علامت‌ها را کاهش می‌دهد.

۲. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $۱۲ - ۸ - ۳ - ۴ + ۶$

ب) $۲ \times ۶ \div ۳ \div ۲ \times ۵$

ج) $۴^۳ + ۳^۲ - ۲ \times ۵^۲$

د) $۶ \times ۲^۳ - ۲ \times ۶^۲$

هـ) $(۷^۲ - ۵^۲)(۶ \times ۳^۲ + ۴) \times ۲۰ - ۲^۵$

و) $(۵^۳ - ۳^۵)(۳^۲ - ۲^۳)^۴ - ۵^۴$

ز) $(۲ - ۳^۲ \times ۵^۲ \div ۱۵ - ۲^۳)(۷ + ۲)$

ح) $۵^۲ - (۳^۲ - ۱^۳) \times ۲^۲ \div ۴^۲$

(ط) $(43 - 5^2 \times 2)^2 - 8 \div 2^4 - 1 \times 3 - 4 \times (8 + 3^2)$

ترتیب انجام عملیات: اول پرانتز، بعد توان، بعد ضرب و تقسیم (از چپ به راست) و در آخر جمع و تفریق.

1. $3 \leftarrow 12 - 8 - 3 - 4 + 6 = 1 - 4 + 6 = -3 + 6 = 3$ ○

2. $10 \leftarrow 2 \times 6 \div 3 \div 2 \times 5 = 4 \div 2 \times 5 = 2 \times 5 = 10$ ○

3. $23 \leftarrow 64 + 9 - 50 = 23 \leftarrow 2 \times 5^2 = 2 \times 25 = 50, 3^2 = 9, 4^3 = 64$ ○

4. $24 \leftarrow 48 - 72 = -24 \leftarrow 2 \times 6^2 = 2 \times 36 = 72, 6 \times 2^3 = 6 \times 8 = 48$ ○

5. $\leftarrow 2^5 = 32, 6 \times 3^2 + 4 = 54 + 4 = 58, 7^2 - 5^2 = 49 - 25 = 24$ ○

$27808 \leftarrow 24 \times 58 \times 20 - 32 = 27840 - 32 = 27808$

6. $\leftarrow (-118) \times 1 - 625 = -743 \leftarrow 5^4 = 625, 1^4 = 1 \text{ و } 3^2 - 2^3 = 9 - 8 = 1, 5^3 - 3^5 = 125 - 243 = -118$ ○

$743 -$

7. $\leftarrow 3^2 \times 5^2 \div 15 = 225 \div 15 = 15$ داخل پرانتز اول: $2 - 15 - 8 = -21$ ؛ $7 + 2 = 9$ ؛ $9 \times 9 = -189 \leftarrow (-21) \times 9 = -189$ ○

$189 -$

8. $23 \leftarrow 25 - 8 \times 4 \div 16 = 25 - 32 \div 16 = 25 - 2 = 23 \leftarrow 3^2 - 1^3 = 9 - 1 = 8$ ○

9. $\leftarrow 4 \times (8 + 9) = 68$ ؛ $1 \times 3 = 3$ ؛ $8 \div 2^4 = 8 \div 16 = 1/2$ ؛ $(-7)^2 = 49$ و $43 - 5^2 \times 2 = 43 - 50 = -7$ ○

$45/2 \leftarrow 49 - 1/2 - 3 - 68 = -22 - 1/2 = -45/2$ (یعنی $-22,5$)

این فایل توسط سایت ایران توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir



ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

تمرین

صفحه ۴

۳

۳. با قرار دادن دو علامت ضرب و دو علامت جمع در جاهای خالی عبارت

$5 \square 4 \square 3 \square 2 \square 1$

کدام یک از اعداد ۱۵، ۲۷، ۲۹ و ۳۰ می تواند حاصل عبارت داده شده باشد؟

جای دو علامت «+» را در چهار جای خالی به ۶ حالت می توان انتخاب کرد (جای دو «×» خودبه خود معلوم می شود). در هر حالت ضرب ها را زودتر از جمع ها حساب می کنیم:

عبارت	محاسبه	حاصل
$5 + 4 + 3 \times 2 \times 1$	$5 + 4 + 6$	۱۵
$5 + 4 \times 3 + 2 \times 1$	$5 + 12 + 2$	۱۹
$5 + 4 \times 3 \times 2 + 1$	$5 + 24 + 1$	۳۰
$5 \times 4 + 3 + 2 \times 1$	$20 + 3 + 2$	۲۵
$5 \times 4 + 3 \times 2 + 1$	$20 + 6 + 1$	۲۷
$5 \times 4 \times 3 + 2 + 1$	$60 + 2 + 1$	۶۳

پاسخ: اعداد ۱۵، ۲۷ و ۳۰ می‌توانند حاصل عبارت باشند؛ عدد ۲۹ در هیچ حالتی به دست نمی‌آید.

تمرین

صفحه ۴

۴

۴. یک ماشین حساب خراب داریم که نمی‌تواند همزمان بیش از دو عدد را باهم جمع کند و هرگاه حاصل جمع اعداد از ۹ بیشتر شود، حاصل جمع را -۳ اعلام می‌کند. با پرانتزگذاری روی عبارت‌های زیر و محاسبه آنها، حاصل حداقل چقدر می‌شود؟

(الف) $1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 2$

(ب) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$

هر پرانتزگذاری یعنی ترتیبی از جمع‌های دوتایی. هر جمع دوتایی یا حاصل جمع واقعی را می‌دهد (اگر از ۹ بیشتر نشود) یا -۳ را. پس مقدار نهایی برابر است با «۳- به ازای هر بار سرریز» به علاوه مجموع عددهایی که در هیچ سرریزی شرکت نکرده‌اند (که منفی نیستند).

هر سرریز روی تکه‌ای پشت سرهم از عددهای اصلی رخ می‌دهد که مجموعشان دست‌کم ۱۰ است، و تکه‌های مربوط به سرریزهای مختلف از هم جدا هستند. پس اگر مجموع همه عددها S باشد، تعداد سرریزها حداکثر $10 \div S$ (جزء صحیح) است و حداقل مقدار برابر ۳- ضرب در همین تعداد است.

(الف) مجموع عددها ۱۲ است، پس حداکثر یک سرریز داریم و حداقل حاصل ۳- است. این مقدار با پرانتزگذاری زیر به دست می‌آید: $((1 + 2) + (1 + (2 + (1 + (2 + (1 + 2))))))$. از درون: $1 + 2 = 3$ ، $1 + 3 = 5$ ، $2 + 5 = 7$ ، $1 + 7 = 8$ ، $2 + 8 = 10$ (سرریز نمی‌شود)؛ بعد $12 = 3 + 9 = 3 + (1 + 2) + 9$ که بیشتر از ۹ است و ۳- اعلام می‌شود. **پاسخ: ۳-**

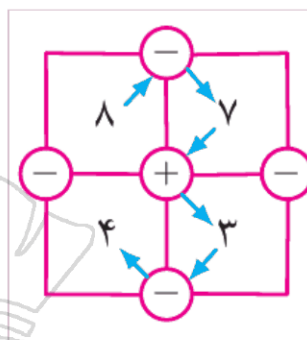
(ب) مجموع عددها ۳۶ است، پس حداکثر ۳ سرریز و حداقل حاصل ۹- است. پرانتزگذاری: $((5 + 6) + (7 + 8)) + ((1 + (2 + (3 + 4))))$. $2 + 7 = 9$ ، $3 + 4 = 7$ ، $1 + 9 = 10$ ، $5 + 6 = 11$ ، $7 + 8 = 15$ ؛ $9 \leftarrow 3 -$ ؛ سپس $6 - = (-3) + (-3)$ و در پایان $9 - = (-3) + (-6)$. **پاسخ: ۹-**

۵. در جدول روبه‌رو، از خانهٔ بالا سمت چپ به خانهٔ پایین سمت چپ مسیری یافته‌ایم که حاصل آن برابر صفر شده است. $۸ - ۷ + ۳ - ۴ = ۰$.

در جدول زیر، از خانهٔ بالا سمت چپ، یعنی خانهٔ ۸ شروع به حرکت کنید و مسیری بیابید که به خانهٔ پایین سمت چپ، یعنی خانهٔ -۵ ختم شود و حاصل برابر ۸ شود. توجه کنید که به هر خانه دقیقاً یک‌بار و به هر دایره حداکثر یک‌بار باید وارد شوید.

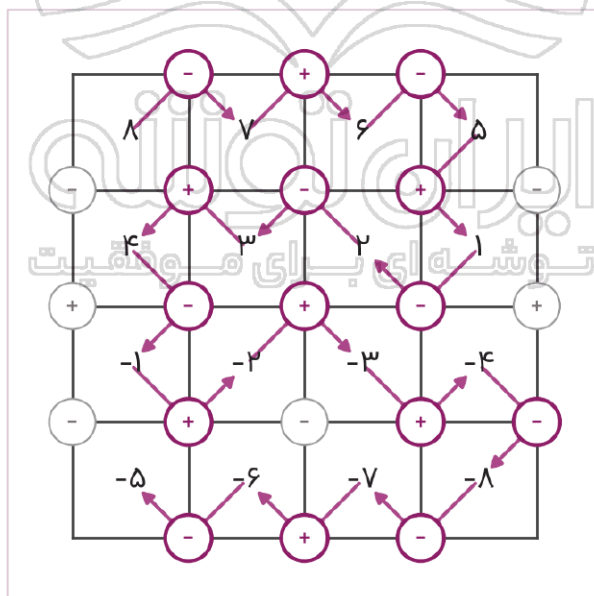
	-	+	-	
	۸	۷	۶	۵
-	+	-	+	-
	۴	۳	۲	۱
+	-	+	-	+
	-۱	-۲	-۳	-۴
-	+	-	+	-
	-۵	-۶	-۷	-۸
	-	+	-	

جدول مسئله



جدول نمونه

در هر قدم از یک خانه، از راه دایره‌ای که یکی از رأس‌های آن خانه است، به خانهٔ دیگری که همان دایره را دارد می‌رویم؛ علامت دایره (+ یا -) روی عدد خانهٔ مقصد اثر می‌گذارد. با آزمون و بررسی (و بررسی همهٔ حالت‌ها با رایانه) مسیر زیر پیدا شد: ابتدا سطر اول از چپ به راست، بعد سطر دوم از راست به چپ، سطر سوم از چپ به راست و سطر چهارم از راست به چپ.



حاصل مسیر (دایره‌های به‌کاررفته به ترتیب: -، +، -، -، +، +، +، -، +، -، -، +، -، +، -):

$$۸ - ۷ + ۶ - ۵ + ۱ - ۲ - ۳ + ۴ = ۲$$

$$۲ - (-۱) + (-۲) + (-۳) + (-۴) = ۲ + ۱ - ۲ - ۳ - ۴ = -۶$$

$$-6 - (-8) - (-7) + (-6) - (-5) = -6 + 8 + 7 - 6 + 5 = 8$$

هر ۱۶ خانه یک بار دیده شده و هر دایره حداکثر یک بار به کار رفته است. **پاسخ: ۸** (مسیر یکتا نیست؛ این یکی از مسیرهای درست است.)

تمرین

صفحه ۵

۶

۶. الگوی زیر را با دقت ببینید.

$$1 = 1 \times 1$$

$$1 + 3 = 2 \times 2$$

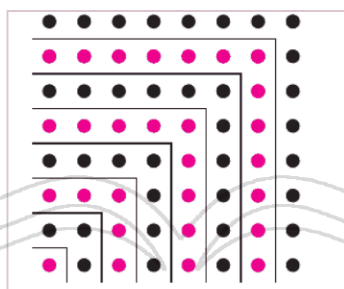
$$1 + 3 + 5 = 3 \times 3$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 4 \times 4$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5 \times 5$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 6 \times 6$$

قانون الگوی بالا چیست؟ آیا می‌توانید دو سطر بعدی این الگو را بنویسید؟ سعی کنید با استفاده از شکل زیر توضیح دهید که چرا تساوی‌های بالا برقرار است.



قانون: مجموع n عدد فرد متوالی اول $(1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1))$ برابر $n \times n$ است.

دو سطر بعدی:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 7 \times 7 \quad (\text{هر دو طرف } 49)$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 8 \times 8 \quad (\text{هر دو طرف } 64)$$

توضیح با شکل: نقطه‌ها را در یک مربع $n \times n$ می‌چینیم. نقطه گوشه ۱ نقطه است. اگر یک مربع $(k - 1) \times (k - 1)$ داشته باشیم و یک سطر و یک ستون به آن اضافه کنیم تا مربع $k \times k$ شود، یک «L» شکل (با رنگ متفاوت) اضافه می‌شود که $2k - 1 = (k - 1) + (k - 1) + 1$ نقطه دارد. یعنی لایه‌های رنگی به ترتیب ۱، ۳، ۵، ... نقطه دارند و با هم مربعی $n \times n$ با نقطه می‌سازند. پس $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n \times n$.

تمرین

صفحه ۶

۷

۷. نجمه حاصل عبارت $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$ را این‌گونه محاسبه کرد:

(در کادر: عددهای ۱ تا ۹ را یک بار از بالا به پایین و یک بار از پایین به بالا کنار هم نوشته و هر ردیف را جمع زده است؛ هر ردیف ۱۰ شده و $45 = (10 \times 9) / 2 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$)
الف) راه حل نجمه را شرح دهید.

ب) با استفاده از راه حل نجمه، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$1 + 2 + 3 + \dots + 117$$

نجمه حاصل عبارت $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$ را این گونه محاسبه کرد:

۱	۹	۱۰
۲	۸	۱۰
۳	۷	۱۰
۴	۶	۱۰
۵	۵	۱۰
۶	۴	۱۰
۷	۳	۱۰
۸	۲	۱۰
۹	۱	۱۰

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = \frac{10 \times 9}{2} = 45.$$

الف) نجمه عددهای ۱ تا ۹ را در یک ستون و همین عددها را به ترتیب برعکس (۹ تا ۱) در ستون کناری نوشته است. هر دو عدد هم ردیف مجموعشان ۱۰ است (مثلاً ۱ + ۹، ۲ + ۸، ...). چون ۹ ردیف داریم، مجموع کل دو ستون $90 = 10 \times 9$ می شود. این مجموع، دو بار حاصل خواسته شده است (هر ستون یک بار)؛ پس $45 = 90 \div 2 = 1 + 2 + \dots + 9$.

ب) به همین روش، مجموع عددهای ۱ تا ۱۱۷ را دو بار می نویسیم؛ هر ردیف $118 = 1 + 117$ می شود و ۱۱۷ ردیف داریم. پس $6903 = (118 \times 117) / 2 = 1 + 2 + \dots + 117$. پاسخ: ۶۹۰۳

تمرین

صفحه ۶

۸

۸. حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $2 + 4 + 6 + \dots + 86$

ب) $4 + 7 + 10 + \dots + 124$

ج) $-43 - 37 - 31 - \dots + 173 + 179$

د) $(-89) - (-6) - (-7) - \dots - (-5)$

ه) $4 - 5 + 6 - 7 + 8 - \dots + 88 - 89 + 90$

و) $-2 - 4 + 6 - 8 - 10 + 12 - \dots - 236 - 238 + 240$

ز) $(20 - 1) + (19 - 1) + (18 - 1) + \dots + (-18 - 1) + (-19 - 1) + (-20 - 1)$

برای مجموع دنباله حسابی (اختلاف ثابت): «(جمله اول + جمله آخر) $\times$ تعداد جمله ها $\div 2$ » (همان روش نجمه). تعداد جمله ها = «(آخر - اول) $\div$ اختلاف + ۱».

۱. جمله ها ۲، ۴، ...، ۸۶: اختلاف ۲: تعداد $43 = (86 - 2) \div 2 + 1$ ؛ مجموع

$$1892 \leftarrow (2 + 86) \times 43 \div 2 = 44 \times 43 = 1892$$

۲. اختلاف ۳: تعداد $41 = (124 - 4) \div 3 + 1$ ؛ مجموع $2624 \leftarrow (4 + 124) \times 41 \div 2 = 64 \times 41 = 2624$

3. جمله‌ها ۱۷۹، ۱۷۳، ...، -۳۱، -۳۷، -۴۳- اختلاف ۶ دارند (جمله‌های میانی ...، ۱۱، ۵، -۱ هم هستند و

علامتشان با همین دنباله می‌آید): تعداد $38 = 6 + 1 = (179 + 43) \div 6$ ؛ مجموع

$$2584 \leftarrow (-43 + 179) \times 38 \div 2 = 136 \times 19 = 2584$$

4. هر « $(-a)$ » برابر « $+a$ » است، پس عبارت برابر است با $89 + \dots + 7 + 6 + 5$. جمله‌های ۶ تا ۸۹: تعداد

$$84 \text{؛ مجموع } 3990 = 42 \times 95 = 2 \div 84 \times (6 + 89) \text{؛ پس } 3985 = 3990 - 5 \leftarrow 3985$$

5. $90 + 89 - 88 + 87 - 86 + \dots + 6 - 5 + 4$: جمله‌های ۴ تا ۸۹ را دوتا دوتا می‌گیریم:

$$(88 - 89) + \dots + (6 - 7) + (4 - 5) \text{؛ تعداد زوج‌ها } 43 = 2 \div (89 - 4 + 1) \text{ و هر زوج } -1 \text{ است، پس } -43 \text{؛}$$

$$\text{با } 90 + 47 = 47 - 43 \leftarrow 47$$

6. سه تاسه تا گروه می‌کنیم: $\dots + (18 - 16 - 14) + (12 - 10 - 8) + (6 - 4 - 2)$. گروه k

ام: $6k - 6 = (6k - 2) - (6k - 4) + 6k = 6k - 6$. آخرین گروه با $6k = 240$ یعنی $k = 40$. مجموع گروه‌ها:

$$(40 + 1) \times 6 - 6 \times 40 = 820 \text{ و } 1 + 2 + \dots + 40 = 820 \text{، پس } -4680 = 820 - 4920 \leftarrow -4680$$

7. $(k - 1)$ برای k از ۲۰ تا -۲۰، یعنی ۴۱ جمله. مجموع k ها صفر است (۲۰ با -۲۰، ۱۹ با -۱۹، ... و ۰ و

مجموع -۱ها برابر -۴۱ است. $-41 \leftarrow 41$

تمرین

صفحه ۶

۹

۹. الگوی عددی زیر را در نظر بگیرید.

الف) دو سطر بعدی این الگو را بنویسید.

ب) اگر این الگو را تا سطر بیستم بنویسیم و سپس همه عددهای آن را با هم جمع بزنیم، حاصل چه عددی می‌شود؟

ج) این الگو را تا سطر چندم ادامه دهیم که مجموع همه عددهای آن -۱۴۴ شود؟

۱	۱	۱
۲	-۲	۲
۳	۳	-۳
۴	-۴	۴

الگو: سطر n ام n عدد دارد که قدر مطلق همه‌شان n است و علامت‌ها یک‌درمیان‌اند؛ علامت عدد اول سطرهای فرد منفی و سطرهای زوج مثبت است.

الف) سطر پنجم: $-5 \quad 5 \quad -5 \quad 5 \quad -5$ — سطر ششم: $6 \quad -6 \quad 6 \quad -6 \quad 6$

ب) مجموع سطر زوج صفر است (نصف عددها $+n$ و نصف $-n$)؛ مجموع سطر فرد $-n$ است (یک عدد $-n$ اضافه می‌ماند). پس تا سطر بیستم فقط سطرهای فرد مؤثرند: $-100 = -10 \times 10 = -(1 + 3 + 5 + \dots + 19)$ (مجموع 10 عدد فرد اول برابر 10×10 است، سؤال ۶). **پاسخ: -100**

ج) تا سطر $23: 144 = -12 \times 12 = -(1 + 3 + \dots + 23)$ (عدد فرد اول 12). سطر 24 مجموعش صفر است، پس مجموع تا سطر 24 هم -144 می‌ماند. **پاسخ: تا سطر 23 (و اگر سطر 24 هم نوشته شود، همچنان -144 می‌ماند).**

تمرین

صفحه ۷

۱۰

۱۰. نوشین حاصل عبارت $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$ را این‌گونه محاسبه کرد:

(در کادر: می‌دانیم $1^2 = 1 \times 1 = 1$, $2^2 = 2 \times 2 = 2 + 2$, $3^2 = 3 \times 3 = 3 + 3 + 3$, $4^2 = 4 \times 4 = 4 + 4 + 4 + 4$, $5^2 = 5 \times 5 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5$ ،

با استفاده از رابطه‌های بالا، سه برابر مجموع $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$ را این‌گونه

حساب می‌کنیم: سه مثلی از عددها را کنار هم می‌گذاریم و در هر ردیف مجموع ۱۱ می‌شود. در نتیجه

$$3 \times (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) = 11 \times (5 \times 6 / 2)$$

الف) راه‌حل نوشین را شرح دهید.

ب) با استفاده از راه‌حل نوشین، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 11^2$$

می‌دانیم:



$$1^2 = 1 \times 1 = 1,$$

$$2^2 = 2 \times 2 = 2 + 2,$$

$$3^2 = 3 \times 3 = 3 + 3 + 3,$$

$$4^2 = 4 \times 4 = 4 + 4 + 4 + 4,$$

$$5^2 = 5 \times 5 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5.$$

با استفاده از رابطه‌های بالا، سه برابر مجموع $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$ را این‌گونه

حساب می‌کنیم:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 5 & 5 & 11 \\ \hline 2 & 4 & 4 & 11 \\ \hline 3 & 3 & 3 & 11 \\ \hline 4 & 2 & 2 & 11 \\ \hline 5 & 1 & 1 & 11 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 5 & 4 & 4 & 11 \\ \hline 4 & 3 & 3 & 11 \\ \hline 3 & 2 & 2 & 11 \\ \hline 2 & 1 & 1 & 11 \\ \hline 1 & & & 11 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 5 & 4 & 4 & 11 \\ \hline 4 & 3 & 3 & 11 \\ \hline 3 & 2 & 2 & 11 \\ \hline 2 & 1 & 1 & 11 \\ \hline 1 & & & 11 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ \hline 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ \hline 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ \hline 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ \hline 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ \hline \end{array}$$

در نتیجه،

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = \frac{11 \times (5 \times 6)}{3}.$$

الف) هر k^2 را به صورت k بار جمع k می‌نویسیم. مثلث اول: ردیف k ام (از بالا) شامل k بار عدد k است؛ $۱: ۲۲$ ؛ $۳: ۳۳۳$ ؛ $۴: ۴۴۴۴$ ؛ $۵: ۵۵۵۵۵$. مجموع عددهای این مثلث برابر $۱^2 + ۲^2 + \dots + ۵^2$ است.

مثلث دوم و سوم همان مثلث اول اند که دوران داده شده‌اند، پس مجموع عددهای هر کدام هم $۱^2 + \dots + ۵^2$ است. در مثلث دوم ردیف k ام از چپ $۱, n-1, \dots, n-k+1$ است (ردیف آخر ۵۴۳۲۱) و در مثلث سوم ردیف k ام $۱, n-k+1, \dots, n-1, n$ است. حالا سه مثلث را روی هم می‌گذاریم: در خانه زام از ردیف k ام سه عدد k و $n-k+1$ و $n-z+1$ هستند که مجموعشان $۲n+1$ است (برای $n=5$: همیشه ۱۱). پس سه مثلث رویهم، مثلثی با $۱+۲+\dots+n = n(n+1)/۲$ خانه است که در هر خانه $۲n+1$ دارد.

نتیجه: $۱^2 + ۲^2 + \dots + n^2 = (۲n+1) \times n(n+1)/۲ \div ۳$ یعنی $۳ \times (۱^2 + ۲^2 + \dots + n^2) = (۲n+1) \times n(n+1)/۲$. برای $n=5$: $۱۱ \times ۱۵ \div ۳ = ۵۵$.

ب) برای $n=117$: $۲n+1 = ۲۳۵$ و $۲ = ۶۹۰۳ \div ۱۱۸ \times ۱۱۷ = n(n+1)/۲$. پس مجموع $۵۴۰۷۳۵ = ۲۳۵ \times ۶۹۰۳ \div ۳$. پاسخ: ۵۴۰۷۳۵ .

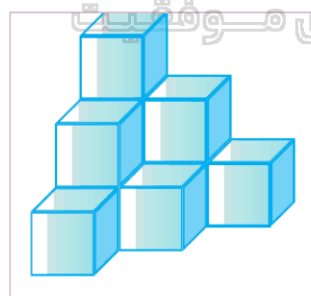
تمرین

صفحه ۷

۱۱

۱۱. در کتاب ریاضی تکمیلی هفتم با چند حجره‌ای‌ها و n -پله آشنا شدید. برای یادآوری، تعریف n -پله در صفحه بعد آمده است.

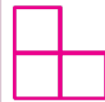
در شکل‌های مقابل، شکل ۱ نمای روبه‌رو، نمای بالا و نمای چپ یک چندحجره‌ای است که به آن ۱-پله می‌گوییم؛ شکل ۲ نمای روبه‌رو، نمای بالا و نمای چپ یک چندحجره‌ای است که به آن ۲-پله می‌گوییم؛ شکل ۳ نمای روبه‌رو، نمای بالا و نمای چپ یک چندحجره‌ای است که به آن ۳-پله می‌گوییم. با همین الگو n -پله را تعریف می‌کنیم. بنابراین n -پله‌ها نمای روبه‌رو، نمای بالا و نمای چپ یکسانی دارند. شکل زیر، تصویری سه‌بعدی از یک ۳-پله است. با روش نوشتن، تعداد مکعب‌های واحد به‌کاررفته در یک n -پله را به‌دست آورید.



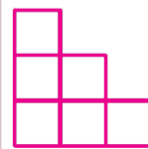
تصویر سه‌بعدی یک ۳-پله



شکل ۱



شکل ۲



شکل ۳

شکل ۱ تا ۳ (نماها)

در ۳- پله (شکل سه بعدی) لایه‌ها از پایین: لایه پایین ۶ مکعب (به شکل ۳- پله تخت: $۱ + ۲ + ۳$)، لایه بعد ۳ مکعب ($۱ + ۲$) و لایه بالا ۱ مکعب؛ جمعاً $۱۰ = ۱ + ۳ + ۶$. در n - پله هم لایه‌ها به ترتیب $۱ + \dots + (n-1) + n$ ، $۱ + \dots + (n-1)$ ، ...، ۱ مکعب دارند، یعنی لایه k ام (از بالا) $k(k+1)/2 = ۱ + ۲ + \dots + k$ مکعب دارد.

تعداد کل مکعب‌ها: $T = ۱ + ۳ + ۶ + \dots + n(n+1)/2$. هر جمله $k(k+1)/2 = (k^2 + k)/2$ است، پس

$$T = (1/2)(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + (1/2)(1 + 2 + \dots + n)$$

طبق روش نوشین $۱^2 + \dots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ و طبق روش نجمه $۱ + \dots + n = n(n+1)/2$. بنابراین

$$T = (1/2)(n(n+1)(2n+1)/6 + n(n+1)/2)$$

$$= (1/2) \times n(n+1)((2n+1) + ۳)/6 = n(n+1)(n+۲)/6$$

پاسخ: یک n - پله $n(n+1)(n+۲)/6$ مکعب دارد (مثلاً $n = ۳$: $۱۰ = ۳ \times ۴ \times ۵ \div 6$ ؛ و برای $n = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵$: $۱, ۴, ۱۰, ۲۰, ۳۵$).

تمرین

صفحه ۸

۱۲

۱۲. اقدس می‌خواست چهل و یک عدد موجود در الگوی عددی زیر را باهم جمع بزند.

$۱, ۴, ۱۰, ۲۰, ۳۵, ۵۶, ۸۴, ۱۲۰, \dots, ۱۲۳۴۱$

او با روشی عجیب حاصل $۱ + ۴ + ۱۰$ را به دست آورد تا در ادامه با استفاده از روش عجیبش مجموع چهل و یک عدد بالا را به دست آورد. اقدس ابتدا $۱ + ۴ + ۱۰$ را این گونه نوشت:

$$۱ + ۴ + ۱۰ = ۱ + (۱ + ۳) + (۱ + ۳ + ۶)$$

$$= ۱ + (۱ + (۱ + ۲)) + (۱ + (۱ + ۲) + (۱ + ۲ + ۳))$$

$$= ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۲ + ۲ + ۲ + ۳.$$

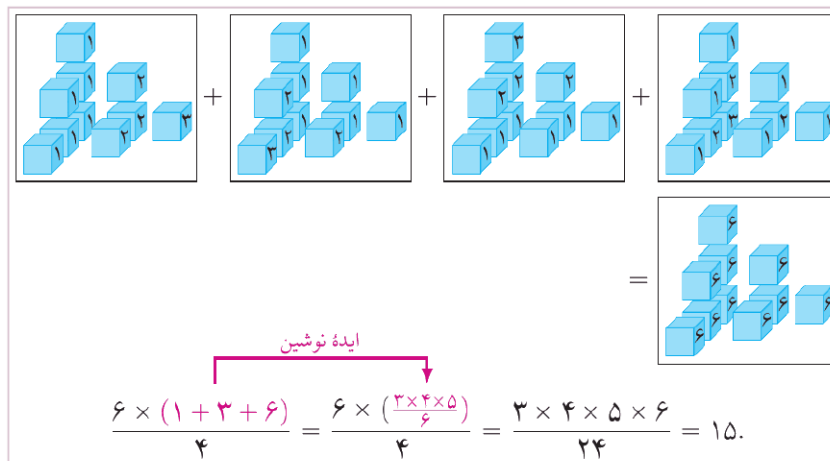
سپس اقدس با استفاده از شکل‌های زیر، حاصل $۱ + ۴ + ۱۰$ را به صورت زیر به دست آورد.

$$۱۵ = (۶ \times (۱ + ۳ + ۶)) / ۴ = (۶ \times (۳ \times ۴ \times ۵ / ۶)) / ۴$$

الف) روش اقدس را توضیح دهید. **روش‌های برای موفقیت**

ب) با استفاده از روش اقدس حاصل جمع زیر را محاسبه کنید.

$$1 + 4 + 10 + 20 + 35 + 56 + 84 + 120 + \dots + 12341$$



الف) عددهای ۱، ۴، ۱۰ به ترتیب تعداد مکعب‌های ۱- پله، ۲- پله و ۳- پله‌اند (سؤال ۱۱) و مجموعشان $1 + 4 + 10 = 15$ است. اقدس هر یک را به عددهای ۱، ۲، ۳ تجزیه کرده (ده عدد: شش تا ۱، سه تا ۲ و یک ۳، که مجموعشان $15 = 6 + 6 + 3$ می‌شود) و آن ده عدد را روی ده مکعب یک ۳- پله می‌نویسد.

چهار شکل مختلف از همان ۳- پله می‌کشد و در هر شکل ده مکعب را با ده عدد بالا (به ترتیب‌های متفاوت) شماره‌گذاری می‌کند، به طوری که روی هر مکعب مجموع عددهای نوشته شده در چهار شکل همیشه ۶ شود (اگر روی یک مکعب در سه شکل اول عددهای a ، b و c باشند، در شکل چهارم عدد $6 - a - b - c$ نوشته می‌شود؛ در شکل آخر روی همه مکعب‌ها ۶ نوشته شده است). مجموع عددهای هر شکل $1 + 4 + 10 = 15$ است؛ پس مجموع عددهای چهار شکل 4×15 است و از طرف دیگر این مجموع برابر 6×10 (شش روی هر یک از ده مکعب) است:

$$1 + 4 + 10 = (6 \times 10) / 4 \leftarrow 4 \times (1 + 4 + 10) = 6 \times 10$$

و عدد ۱۰ را با روش نوشتن (سؤال ۱۱) برابر $(3 \times 4 \times 5) / 6 = 1 + 3 + 6$ گرفته است. نتیجه: $15 = (6 \times (3 \times 4 \times 5 / 6)) / 4 = (3 \times 4 \times 5 \times 6) / 24$.

به طور کلی برای جمع $1 + 4 + 10 + \dots$ تا n - پله: چهار شماره‌گذاری از n - پله با مجموع $n + 3$ روی هر مکعب انجام می‌شود، پس $(n + 3) / 4 \times n(n + 1)(n + 2) / 6 = n(n + 1)(n + 2)(n + 3) / 24$.

ب) $12341 = 41 \times 42 \times 43 \div 6$ ، یعنی عدد آخر تعداد مکعب‌های یک ۴۱- پله است و جمع، از ۱- پله تا ۴۱- پله است (۴۱ عدد). مجموع هر مکعب در چهار شماره‌گذاری $41 + 3 = 44$ می‌شود. پس

$$12341 \times 44 = 44 \times S = 4 \times S = 11 \times 12341 = 135751 \leftarrow S = (41 \times 42 \times 43 \times 44 / 24) = 135,751. \text{ پاسخ: } 135,751$$

این فایل توسط سایت ایران توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir

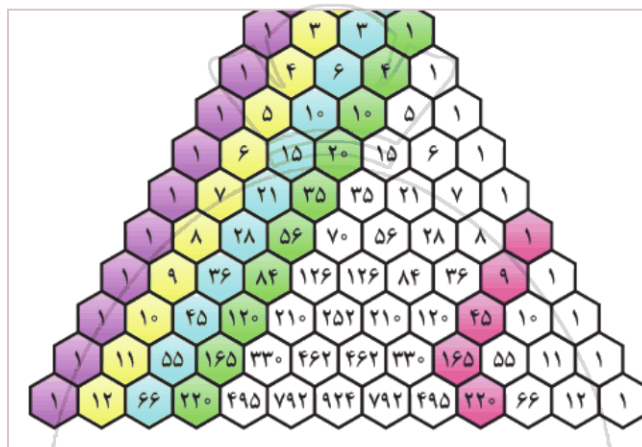


۱۳. در کتاب تکمیلی سال هفتم با مثلث خیام آشنا شدید. شکل زیر، قسمتی از مثلث خیام را نشان می‌دهد. قبل از دیدن مسائل صفحه بعد، حدس بزنید اعداد مثلث خیام چه ارتباطی با مسئله‌های نجمه، نوشین و اقدس دارند.

در مثلث خیام صفحه قبل، اعدادی که رنگ زمینه آنها صورتی، زرد، آبی و سبز است، به ترتیب روی قطرهای صفر، اول، دوم و سوم قرار گرفته‌اند.

الف) باتوجه به ایده‌های نجمه، نوشین و اقدس، مجموع اعداد قطر اول، قطر دوم و قطر سوم مثلث خیام صفحه قبل را به دست آورید.

ب) می‌خواهیم مجموع n عدد اول قطر m مثلث خیام را بیابیم. حدس شما چیست؟



حدس (ارتباط): قطر اول مثلث خیام همان عددهای $1, 2, 3, \dots$ است؛ قطر دوم $1, 3, 6, 10, 15, \dots$ است که هر عددش مجموع عددهای 1 تا n است (مسئله نجمه)؛ قطر سوم $1, 4, 10, 20, 35, \dots$ است که هر عددش مجموع عددهای قطر دوم است و تعداد مکعب‌های n - پله است (مسئله اقدس و نوشین: $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$).
الف) قطر اول (زرد): $1 + 2 + 3 + \dots + 12 = \frac{(12 \times 13)}{2} = 78$ (روش نجمه).

قطر دوم (آبی): $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36 + 45 + 55 + 66$ (روش نوشین، سؤال ۱۱).
 ۱۱ - پله اند؛ مجموع = تعداد مکعب‌های یک ۱۱ - پله سه بعدی = $286 = \frac{11 \times 12 \times 13}{6}$ (روش نوشین، سؤال ۱۱).

قطر سوم (سبز): $1 + 4 + 10 + 20 + 35 + 56 + 84 + 120 + 165 + 220$ (۱۰ عدد؛ تعداد مکعب‌های ۱۱ - پله تا ۱۰ - پله).
 پله؛ روش اقدس: $715 = \frac{(10 \times 11 \times 12 \times 13)}{24}$.

(جمع هر سه قطر: $78 + 286 + 715 = 1079$)

ب) حدس: مجموع n عدد اول قطر m برابر با n امین عدد قطر $(m+1)$ است، یعنی $(n+m)!$ / $((m+1)! \times (n-1)!)$. (مثلاً $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ ، چهارمین عدد قطر دوم؛ $1 + 3 + 6 + 10 = 20$ ، چهارمین عدد قطر سوم؛ و در شکل: $1 + 9 + 45 + 165 = 220$). این حدس با مسئله‌های بالا هم می‌خواند: برای $m=1$ مجموع $\frac{n(n+1)}{2}$ ، برای $m=2$ برابر $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ و برای $m=3$ برابر $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$ می‌شود.

۱۴. اگر n^2 تا عدد متمایز، طوری در یک جدول $n \times n$ چیده شود که حاصل جمع اعداد روی هر سطر، هر ستون و هر قطر، عدد یکسانی باشد، به این جدول $n \times n$ مربع جادویی می‌گویند. برای مثال، جدول زیر، یک مربع جادویی 3×3 با اعداد ۱ تا ۹ است.

$$6 \ 1 \ 8 / 7 \ 5 \ 3 / 2 \ 9 \ 4$$

(الف) آیا در تمام مربع‌های جادویی 3×3 که با اعداد ۱ تا ۹ ساخته می‌شوند، مجموع هر سطر، هر ستون و هر قطر ۱۵ است؟ چرا؟

(ب) باتوجه به متن زیر، یک مربع جادویی 5×5 با اعداد ۱ تا ۲۵ بسازید.

فرض کنید n عددی فرد باشد. برای ساختن یک مربع جادویی $n \times n$ با اعداد ۱ تا n^2 ، ابتدا عدد ۱ را در خانه وسط سطر بالایی جدول $n \times n$ قرار می‌دهیم. یک خانه به بالا می‌رویم و یک خانه به سمت چپ (اگر از جدول خارج شدیم از سمت مقابل وارد می‌شویم) و عدد بعدی را داخل آن می‌نویسیم و همین کار را تکرار می‌کنیم تا به n^2 برسیم. اگر در مرحله‌ای به خانه‌ای رسیدیم که پر بود (و می‌خواستیم عدد m را داخل آن بنویسیم)، عدد بعدی را زیر خانه عدد قبلی (خانه‌ای که عدد $m - 1$ را در آن نوشته بودیم)، می‌نویسیم.

(ج) یک مربع جادویی 4×4 با اعداد ۱ تا ۱۶ بسازید.

(د) پروژهِ. اگر n یک عدد طبیعی زوج و $n > 2$ ، آنگاه روشی برای ساخت مربع‌های جادویی $n \times n$ با اعداد ۱ تا n^2 ارائه کنید.

(الف) بله. مجموع عددهای ۱ تا ۹ برابر $1 + 2 + \dots + 9 = 45$ است. سه سطر جدول همه ۹ عدد را دقیقاً یک بار شامل می‌شوند، پس مجموع سه سطر ۴۵ است. چون مجموع هر سطر باید یکسان باشد و مجموع سه‌تای آنها ۴۵ است، مجموع هر سطر $45 \div 3 = 15$ می‌شود. همین استدلال برای ستون‌ها هم درست است، و مجموع قطرهای طبق تعریف مربع جادویی با مجموع سطرها برابر است؛ پس همه ۱۵ هستند.

(ب) عدد ۱ را وسط سطر اول می‌نویسیم. هر بار یک خانه به بالا و یک خانه به چپ می‌رویم (خروج از جدول: ورود از سمت مقابل) و عدد بعدی را می‌نویسیم، و اگر خانه پر بود عدد را زیر خانه عدد قبلی می‌نویسیم. ۲: بالای سطر اول وجود ندارد، پس به آخرین سطر می‌رویم، ستون چهارم؛ ۳: سطر چهارم، ستون اول؛ ۴: یک خانه به چپ از جدول خارج می‌شود، پس ستون آخر، سطر سوم؛ ۵: سطر دوم، ستون چهارم؛ ۶: خانه بعدی (سطر اول، ستون سوم) پر است (۱)، پس ۶ را زیر ۵ می‌نویسیم؛ و همین‌طور تا ۲۵. (همین روش برای $n = 3$ مربع 3×3 با اعداد ۱ تا ۹ مثال کتاب را می‌دهد).

مربع جادویی 5×5 (مجموع هر سطر، ستون و قطر = ۶۵)

۱۷	۲۴	۱	۸	۱۵
۲۳	۵	۷	۱۴	۱۶
۴	۶	۱۳	۲۰	۲۲
۱۰	۱۲	۱۹	۲۱	۳
۱۱	۱۸	۲۵	۲	۹

بررسی: $۱۷ + ۵ + ۱۳ + ۲۱ + ۹ = ۶۵$ قطر دیگر $۱۵ + ۱۴ + ۱۳ + ۱۲ + ۱۱ = ۶۵$ ، قطر $۱۵ + ۸ + ۱ + ۲۴ + ۱۷ = ۶۵$ ، بقیه سطرها، ستون‌ها هم ۶۵ است $(n(n^2 + 1)/۲ = ۵ \times ۲۶ \div ۲ = ۶۵)$.

(ج) یک مربع ۴×۴ (مجموع ۳۴):

۱۳	۳	۲	۱۶
۸	۱۰	۱۱	۵
۱۲	۶	۷	۹
۱	۱۵	۱۴	۴

روش ساخت: عددهای ۱ تا ۱۶ را سطر به سطر می‌نویسیم؛ سپس عددهای دو قطر را با «۱۷ - عدد» عوض می‌کنیم $(۱۶ \rightarrow ۱, ۱۳ \rightarrow ۴, ۱۱ \rightarrow ۶, ۱۰ \rightarrow ۷, ۷ \rightarrow ۱۰, ۶ \rightarrow ۱۱, ۴ \rightarrow ۱۳, ۱ \rightarrow ۱۶)$. مجموع هر سطر، ستون و قطر ۳۴ می‌شود.

(د) پروژه (روش‌های ساخت برای n زوج):

(۱) n مضرب ۴ $(۴, ۸, ۱۲, \dots)$: عددهای ۱ تا n^2 را سطر به سطر از چپ به راست می‌نویسیم. جدول را به قسمت‌های ۴×۴ تقسیم می‌کنیم و در هر قسمت ۴×۴ عددهای واقع روی دو قطر آن قسمت را با $n^2 + ۱$ منهای همان عدد عوض می‌کنیم (بقیه سر جای خود می‌مانند). نتیجه یک مربع جادویی است؛ برای $n = ۴$ همان مربع قسمت (ج) به دست می‌آید و برای $n = ۸$ مجموع هر سطر، ستون و قطر ۲۶۰ می‌شود.

(۲) $n = ۲m$ که m فرد باشد $(۶, ۱۰, ۱۴, \dots)$: جدول را به چهار مربع $m \times m$ تقسیم می‌کنیم: بالا - چپ A، بالا - راست B، پایین - چپ C، پایین - راست D. هر یک را با روش قسمت (ب) (ولی در اینجا با حرکت یک خانه به بالا و یک خانه به راست، که قرینه آینه‌ای روش کتاب است) پر می‌کنیم: A با اعداد ۱ تا m^2 ، D با اعداد $m^2 + ۱$ تا $۲m^2$ ، B با $۲m^2 + ۱$ تا $۳m^2$ و C با $۳m^2 + ۱$ تا $۴m^2$ (یعنی هر بار به عددهای مربع A مقدار ثابت اضافه می‌کنیم). سپس $k = (m - ۱)/۲$ را حساب می‌کنیم و: (۱) در هر سطر A جای k خانه اول سمت چپ را با خانه‌های هم‌ردیف‌شان در C عوض می‌کنیم؛ فقط برای سطر وسط A به جای ستون‌های $۱ \dots k$ از ستون‌های $۲ \dots k + ۱$ عوض می‌کنیم. (۲) آخرین $k - ۱$ ستون سمت راست B را با D (هم‌ردیف‌ها) عوض می‌کنیم. نتیجه یک مربع جادویی با مجموع $n(n^2 + ۱)/۲$ است.

مثال $n = ۶$ (مجموع هر سطر، ستون و قطر برابر ۱۱۱):

۲۴	۱۹	۲۶	۶	۱	۳۵
۲۵	۲۳	۲۱	۷	۳۲	۳
۲۰	۲۷	۲۲	۲	۹	۳۱
۱۵	۱۰	۱۷	۳۳	۲۸	۸
۱۶	۱۴	۱۲	۳۴	۵	۳۰
۱۱	۱۸	۱۳	۲۹	۳۶	۴

هر دو روش با برنامه برای $n = ۴, ۶, ۸, ۱۰, ۱۲, ۱۴, ۱۶, ۱۸, ۲۲$ و روش قسمت (ب) برای $n = ۳, ۵, ۷, ۹$ آزموده شدند.

تمرین

صفحه ۱۱

۱۵

۱. حاصل عبارت زیر تقریباً چقدر است؟

$$\frac{۱۰۲۳}{۱۰۲۴} + \frac{۵۱۳}{۵۱۱} - \frac{۳۰۱}{۹۰۰} + \frac{۵}{۶}$$

هر کسر را به نزدیک‌ترین عدد ساده تقریب می‌زنیم: $۱۰۲۳/۱۰۲۴ \approx ۱$ (کمی کمتر از ۱)، $۵۱۳/۵۱۱ \approx ۱$ (کمی بیشتر از ۱)، $۳۰۱/۹۰۰ \approx ۱/۳$ ، و $۵/۶$ را نگه می‌داریم.

$۱ + ۱ - ۱/۳ + ۵/۶ = ۲ + (-۲ + ۵)/۶ = ۲ + ۱/۲ = ۵/۲$ یعنی حاصل تقریباً $۲,۵$ است. (مقدار دقیق

$۲,۵۰۱۸۳...$ است.) پاسخ: تقریباً $۲,۵$

تمرین

صفحه ۱۱

۱۶

۲. اگر نقطه A نمایش $\frac{۲}{۷}$ و نقطه B نمایش $\frac{۲}{۳}$ روی محور اعداد زیر باشد و فاصله این دو عدد روی محور به پنج قسمت مساوی تقسیم شده باشد، در این صورت نقطه C نمایش چه عددی است؟



فاصله A تا B: $۲/۳ - ۲/۷ = ۱۴/۲۱ - ۶/۲۱ = ۸/۲۱$. این فاصله به ۵ قسمت مساوی تقسیم شده، پس هر قسمت $۸/۲۱ \div ۵ = ۸/۱۰۵$ است. نقطه C یک قسمت بعد از A است:

$C = ۲/۷ + ۸/۱۰۵ = ۳۰/۱۰۵ + ۸/۱۰۵ = ۳۸/۱۰۵$ (بررسی: پاسخ: $۳۸/۱۰۵$)

$$(۲/۷ + ۵ \times ۸/۱۰۵ = ۳۰/۱۰۵ + ۴۰/۱۰۵ = ۷۰/۱۰۵ = ۲/۳ = B)$$

۳. اگر به مخرج کسر $\frac{10}{15}$ عدد ۶ را اضافه کنیم، چه عددی باید به صورت کسر اضافه کنیم تا مقدار کسر تغییر نکند؟

مخرج جدید: $15 + 6 = 21$. فرض کنید به صورت عدد x را اضافه کنیم: $\frac{10}{15} = \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{21}{21} = \frac{10+x}{21}$. پس

$$x = 4 \text{ و } 10 + x = \frac{2}{3} \times 21 = 14$$

بررسی: $\frac{10}{15} = \frac{2}{3} = \frac{14}{21}$. **پاسخ: عدد ۴** (به طور کلی باید صورت و مخرج را در یک عدد ضرب کنیم: $10 \times 7/5 = 14$ و $21 \div 15 = 7/5$)

۴. مقدار x را در معادله‌های زیر به دست آورید. سپس با جایگذاری مقدار x ، کسرهای سمت راست و چپ هر تساوی را مشخص کنید.

(الف) $\frac{46}{2/5} \times 5 = \frac{x}{0/125}$

(ب) $\frac{x}{12} = \frac{x+6}{3}$

(ج) $-\frac{4}{11} = \frac{x}{x+30}$

(الف) سمت چپ: $46 \times 2 = 92$ و $46/2/5 = 18/4$ و $18/4 \times 5 = 92$. پس $x/0/125 = 92$ و $x = 11,5$

(ب) $x = 92 \times 0/125 = 11,5$ و $11,5 = 23/2$ سمت راست: $23/2 \times 8 = 92$ هر دو طرف 92 . $x = 11,5$

(ب) ضرب طرفین در وسطین: $12(x+6) = 3x \Rightarrow 12x + 72 = 3x \Rightarrow 9x = 72 \Rightarrow x = 8$ سمت چپ: $-2/3 = -8/12$ ؛ سمت راست: $-2/3 = (-8+6)/3 = -2/3$. $x = -8$ و هر دو کسر $-2/3$ است.

(ج) ضرب طرفین در وسطین: $11x = -4(x+30) \Rightarrow 11x = -4x - 120 \Rightarrow 15x = -120 \Rightarrow x = -8$ سمت چپ: $-4/11$ ؛ سمت راست: $-4/11 = -8/22 = -8/(-8+30) = -8/22$. $x = -8$ و هر دو کسر $-4/11$ است.

۵. در تساوی زیر، مقدار x را پیدا کنید.

$$\frac{1}{x} + \frac{5}{2x} + \frac{7}{4x} + \frac{6}{8x} = \frac{3}{2}$$

مخرج مشترک سمت چپ $8x$ است: $1/x = 8/(8x)$ ، $5/(2x) = 20/(8x)$ ، $7/(4x) = 14/(8x)$ ، $6/(8x) = 6/(8x)$. جمع: $(8+20+14+6)/(8x) = 48/(8x) = 6/x$

$$. \frac{1}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{16} + \frac{6}{32} = \frac{48}{32} = \frac{3}{2} : 32 = 32 : 3 = 4 \leftarrow x = 4$$

پاسخ: $x = 4$

تمرین

صفحه ۱۲

۲۰

۶. خانم خیرخواه و آقای خیراندیش دو معلم ریاضی هستند. آنها درباره اینکه چرا عدد صفر معکوس ندارد، این گونه بحث کردند:

در کلاس درس آقای خیراندیش	در کلاس درس خانم خیرخواه
آقای خیراندیش معکوس ۵ یعنی $\frac{1}{5}$، مقداری است که اگر ۵ تا از آن داشته باشیم یعنی یک واحد داریم؛ $5 \times \frac{1}{5} = 1$. معکوس ۲ یعنی $\frac{1}{2}$، مقداری است که اگر ۲ تا از آن داشته باشیم یعنی یک واحد داریم؛ $2 \times \frac{1}{2} = 1$. با این تعریف معکوس صفر، یعنی $\frac{1}{0}$ چه معنایی دارد؟ دانش آموز یعنی مقداری که اگر صفر تا از آن داشته باشیم، یک واحد داریم؛ $0 \times \frac{1}{0} = 1$. آقای خیراندیش $\frac{1}{0}$ عددی است که اگر هیچ‌ازش نداشته باشیم یک واحد داریم و این معنایی ندارد. پس معکوس صفر تعریف نشده است.	خانم خیرخواه $\frac{12}{12}$ تقسیم بر ۴ یعنی ۱۲ تا سیب داریم و ۴ تا سیب و می‌خواهیم در هر سیب به‌طور مساوی سیب قرار دهیم. حالا در هر سیب چند تا سیب داریم؟ دانش آموز ۳ تا. خانم خیرخواه با این تعبیر اگر بخواهیم $\frac{12}{12}$ را تقسیم بر صفر کنیم، یعنی ۱۲ تا سیب داریم و صفر تا سیب. یعنی سیب نداریم و می‌خواهیم در هر سیب به‌طور مساوی سیب قرار دهیم. حالا در هر سیب چند تا سیب داریم؟ دانش آموز خانم سب نداریم که بخواهیم داخلش سیب بگذاریم. خانم خیرخواه به همین خاطر تقسیم بر صفر تعریف نمی‌شود. در نتیجه یک تقسیم بر صفر یعنی $\frac{1}{0}$ یا به عبارتی معکوس صفر هم تعریف نشده است.

الف) هر دو بحث در نتیجه‌گیری (معکوس صفر وجود ندارد) درست‌اند، ولی چند نکته دقت در نوشته‌ها هست:

- در کلاس آقای خیراندیش، تعریف «a تا از مقدار $\frac{1}{a}$ برابر یک واحد است» برای ۵ و ۲ درست و روشن است. اما معنای «صفر تا از آن، یک واحد شود» را با خود تعریف $\frac{1}{0} \times 0 = 1$ نمی‌توان مشخص کرد، چون در آن از خود $\frac{1}{0}$ استفاده شده است (استدلال دوری). دلیل ریاضی دقیق این است که حاصل ضرب صفر در هر عددی صفر است و هیچ عددی نیست که ضرب در ۰ یک شود؛ جمله «معنایی ندارد» هم به‌تنهایی دلیل نیست.
- در کلاس خانم خیرخواه، مثال با ۱۲ سیب نشان می‌دهد $12 \div 0$ تعریف نمی‌شود؛ ولی نتیجه‌گیری درباره $\frac{1}{0}$ وقتی کامل می‌شود که همین استدلال را برای ۱ سیب تکرار کنیم (یا بگوییم تعبیر تقسیم برای هر عددی یکی است). همچنین «سب نداریم» یعنی نمی‌توان تقسیم کرد؛ نه اینکه جواب صفر یا هر عدد دیگر است.

(ب) تعبیرهای دیگر: (۱) اگر $\circ$ معکوسی مانند a داشت، باید $a \times \circ = 1$ می‌شد؛ ولی $a \times \circ = 0$ و $1 \neq 0$ (۲) اگر $1/0$ وجود داشت، از $2 \times 0 = 1 \times 0$ با تقسیم دو طرف بر 0 (یعنی ضرب در $1/0$) نتیجه می‌شد $2 = 1$ که نادرست است. (۳) روی محور: هر چه مخرج کسر $1/x$ به صفر نزدیک‌تر شود، عدد بزرگ‌تر و بزرگ‌تر می‌شود و از هر عددی بزرگ‌تر می‌شود، پس هیچ عدد مشخصی نیست که بتوان آن را $1/0$ نامید.

تمرین

صفحه ۱۳

۲۱

۷. بین دو عدد ۹ و ۱۰، سی عدد گویا بنویسید.

اعداد $9 + k/100$ برای $k = 1, 2, \dots, 99$ همه گویا و بزرگ‌تر از ۹ و کوچک‌تر از ۱۰ هستند:

۹,۱۰	۹,۰۹	۹,۰۸	۹,۰۷	۹,۰۶	۹,۰۵	۹,۰۴	۹,۰۳	۹,۰۲	۹,۰۱
۹,۲۰	۹,۱۹	۹,۱۸	۹,۱۷	۹,۱۶	۹,۱۵	۹,۱۴	۹,۱۳	۹,۱۲	۹,۱۱
۹,۳۰	۹,۲۹	۹,۲۸	۹,۲۷	۹,۲۶	۹,۲۵	۹,۲۴	۹,۲۳	۹,۲۲	۹,۲۱

(هر کدام به صورت کسر $(900 + k)/100$ است، مثلاً $9,01 = 901/100$).

تمرین

صفحه ۱۳

۲۲

۸. حاصل عبارت‌های زیر را به صورت یک کسر ساده‌نشده بنویسید.

$$\begin{aligned} \text{(الف)} \quad & \frac{6+14}{6} \quad \text{(ب)} \quad \frac{6 \times 14}{6} \\ \text{(ج)} \quad & \frac{3+5+7}{5} \quad \text{(د)} \quad \frac{3 \times 5 + 5 \times 7}{5} \\ \text{(هـ)} \quad & \frac{52 \times 218}{91 \times 218} \quad \text{(و)} \quad \frac{52 + 218}{91 + 218} \\ \text{(ز)} \quad & \frac{3 \times 3^2 \times 3^3 - 1}{3 \times 3 \times 3 - 1} \quad \text{(ح)} \quad \frac{2 \times 5 \times 7 \times 11 + 7}{2 \times 5 \times 11} \end{aligned}$$

نکته: در جمع و تفریق نمی‌توان یک عامل مشترک را از صورت و مخرج حذف کرد؛ فقط عامل مشترک ضرب را می‌توان حذف کرد. حاصل ابتدا محاسبه، سپس ساده می‌شود.

۱. $\circ$ $14/1 = 14/6 = (6 \times 14)/6$ (عامل ۶ ساده می‌شود). $\leftarrow 14$
۲. $\circ$ $10/3 = 20/6 = (6 + 14)/6$ (تقسیم صورت و مخرج بر ۲). $\leftarrow 10/3$
۳. $\circ$ $10 = 50/5 = (15 + 35)/5$. $\leftarrow 10$
۴. $\circ$ $3 = 15/5 = (3 + 5 + 7)/5$. $\leftarrow 3$
۵. $\circ$ $90/103 = 270/309 = (52 + 218)/(91 + 218)$ (تقسیم بر ۳؛ 103 اول است). $\leftarrow 90/103$
۶. $\circ$ $4/7 = 52/91 = (52 \times 218)/(91 \times 218)$ (عامل مشترک ۲۱۸ و سپس ۱۳). $\leftarrow 4/7$

7. $\circ$ $777/110 = (770 + 7)/110 = (7 \times 11 + 7)/(7 \times 5 + 11) = (2 \times 5 \times 7 \times 11 + 7)/(2 \times 5 \times 11)$. چون $777 = 3 \times 7 \times 37$ و

$110 = 2 \times 5 \times 11$ عامل مشترک ندارند، ساده‌نشده‌نی است. $\leftarrow 777/110$

8. $\circ$ $729 = 3^6 = 3 \times 3^2 \times 3^3 = 27$ و $3 \times 3 \times 3 = 27$ ؛ $728/26 = 28$ ؛ $(729 - 1)/(27 - 1) = 728/26 = 28$ ؛ $28 = 2 \times 2 \times 7$ ؛ $728 = 26 \times 28$. $\leftarrow$

۲۸

تمرین

صفحه ۱۳

۲۳

۹. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $1/2 + 1/6 + 1/12 + 1/20 + 1/30 + 1/42 + 1/56$

ب) $2/(3 \times 5) + 2/(5 \times 7) + 2/(7 \times 9) + \dots + 2/(49 \times 51)$

ج) $1/(5 \times 8) + 1/(8 \times 11) + 1/(11 \times 14) + \dots + 1/(32 \times 35)$

د) $1/(1 \times 6) + 1/(6 \times 11) + 1/(11 \times 16) + \dots + 1/(46 \times 51)$

هـ) $1/(3 \times 6) + 1/(6 \times 9) + 1/(9 \times 12) + \dots + 1/(21 \times 24)$

و) $(2 + 4)/(2 \times 3 \times 4) + (4 + 6)/(4 \times 5 \times 6) + (6 + 8)/(6 \times 7 \times 8) + \dots + (18 + 20)/(18 \times 19 \times 20)$

ز) $1/(2 \times 4) + 1/(3 \times 5) + 1/(4 \times 6) + \dots + 1/(98 \times 100)$

ایده کلی (شکستن کسر): اگر $b - a = d$ باشد، $1/(a \times b) = (1/d) \times (1/a - 1/b)$ ؛ در جمع، جمله‌های میانی یکدیگر را حذف می‌کنند.

1. $\circ$ $1 \times 2 = 2$ ، $2 \times 3 = 6$ ، $\dots$ ، $7 \times 8 = 56$ ؛ هر جمله $1/(k(k+1)) = 1/k - 1/(k+1)$ ؛ مجموع

$7/8 \leftarrow (1 - 1/2) + (1/2 - 1/3) + \dots + (1/7 - 1/8) = 1 - 1/8 = 7/8$

2. $\circ$ $2/(a(a+2)) = 1/a - 1/(a+2)$ ؛ مجموع $(1/3 - 1/5) + \dots + (1/49 - 1/51) = 16/51$ برابر $1/3 - 1/51 = 16/51$. $\leftarrow$

۱۶/۵۱

3. $\circ$ اختلاف ۳: $1/(a(a+3)) = (1/3)(1/a - 1/(a+3))$ ؛ مجموع $(1/3)(1/5 - 1/35) = (1/3)(6/35) = 2/35$. $\leftarrow 2/35$

روش‌های برای موفقیت

4. $\circ$ اختلاف ۵: مجموع $10/51 = (1/5)(50/51) = (1/5)(1/1 - 1/51) = 10/51$. $\leftarrow 10/51$

5. $\circ$ اختلاف ۳: مجموع $7/72 = (1/3)(7/24) = (1/3)(1/3 - 1/24) = 7/72$. $\leftarrow 7/72$

6. $\circ$ صورت $2(a+1) = 2(a+1)$ است، پس $2/(a(a+1)(a+2)) = 1/a - 1/(a+2)$ ؛ $2(a+1)/(a(a+1)(a+2)) = 2/(a(a+2)) = 1/a - 1/(a+2)$ است، پس

برای $a = 2, 4, \dots, 18$ ؛ مجموع $9/20 = 1/2 - 1/20 = (1/2 - 1/4) + \dots + (1/18 - 1/20)$. $\leftarrow 9/20$

7. $\circ$ $1/(k(k+2)) = (1/2)(1/k - 1/(k+2))$ ؛ برای $k = 2, 3, \dots, 98$ ؛ جمله‌های میانی حذف می‌شوند و فقط

$1/2 + 1/3 - 1/100 - 1/99 = -1/99 - 1/100$ می‌مانند: $8051/19800 = (1/2)(5/6 - 199/9900) = 8051/19800$. $\leftarrow 8051/19800 \approx$

(0,4066)

۱۰. در تساوی زیر مقدار m و n را بیابید.

$$\frac{5}{4} \times \frac{6}{5} \times \frac{7}{6} \times \dots \times \frac{m}{n} = 3$$

کسرها از الگوی $(k+1)/k$ پیروی می‌کنند، پس کسر آخر $m/(m-1)$ است، یعنی $n = m - 1$. در ضرب، هر مخرج با صورت کسر قبلی ساده می‌شود: $m/4 \times 6/5 \times 7/6 \times \dots \times m/(m-1) = m/4$.

$m/4 = 3 \Rightarrow m = 12$ و $n = 11$. بررسی: $5/4 \times 6/5 \times \dots \times 12/11 = 12/4 = 3$. پاسخ: $m = 12, n = 11$.

۱۱. جدول زیر را با اعداد داده‌شده طوری پر کنید که یک مربع جادویی تشکیل شود.

$0, 1/100, 1/50, 1/25, 1/20, 3/100, -1/100, -1/50, -3/100$

مجموع نه عدد (با مخرج ۱۰۰): $9 = 3 - 2 - 1 + 3 + 5 + 4 + 2 + 1 + 0$ ، یعنی $9/100$. سه سطر همه عددها را شامل می‌شوند، پس مجموع هر سطر، ستون و قطر باید $3/100 = 9/100 \div 3$ باشد.

خانه وسط در چهار خط (سطر، ستون، دو قطر) شرکت دارد؛ مجموع این چهار خط $4 \times 3/100$ است و هر خانه دیگر یک‌بار شمرده شده و وسط ۴ بار؛ پس $12/100 = 9/100 + 3c$ (c خانه وسط) و خانه وسط $1/100$ است. با چند آزمون، چینش زیر به دست می‌آید:

مربع جادویی (مجموع هر سطر، ستون و قطر $3/100 =$)

$-1/50$	$1/20$	۰
$3/100$	$1/100$	$-1/100$
$1/50$	$-3/100$	$1/25$

بررسی: سطرها: $3 = 0 + 5 - 2$ ، $3 = -1 + 1 + 3$ ، $3 = 4 - 3 + 2$ ؛ ستون‌ها: $3 = 0 - 1 + 4$ ، $3 = 5 + 1 - 3$ ، $3 = -2 + 3 + 2$ ؛ قطرها: $3 = 0 + 1 + 2$ و $3 = -2 + 1 + 4$ (همه به صورت صدم). (چینش‌های دیگر هم هستند؛ مثلاً قرینه‌های این مربع).

۱۲. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{-20}{35} + \frac{-2}{7} - \frac{10}{5}$

ب) $\frac{\frac{15}{32} \times \frac{13}{4}}{-\frac{3}{8} \times \frac{-5}{16}} \div 52$

$$\text{ج) } \frac{1 + \frac{3}{4}}{(2 + \frac{1}{5}) \div (1 - \frac{1}{4})}$$

$$\text{د) } \frac{373737}{37} \left(\frac{1}{37} + \frac{1}{13 \times 7} \right)$$

1. $\circ$ $20/7 \leftarrow -4/7 - 2/7 - 2 = -6/7 - 14/7 = -20/7$ ؛ $10/5 = 2$ و $-20/35 = -4/7$
2. $\circ$ صورت: $195/128$ ؛ $15/32 \times 13/4 = 195/128$ ؛ مخرج: $15/128$ ؛ $(-3/8) \times (-5/16) = 15/128$. نسبت:
- $13 = (195/128) \div (15/128)$. سپس $1/4 = 13 \div 52$. $1/4 \leftarrow 13$
3. $\circ$ صورت: $7/4 = 1 + 3/4$ ؛ مخرج: $11/5$ ؛ $2 + 1/5 = 11/5$ ؛ $1 - 1/4 = 3/4$ ؛ $11/5 \div (3/4) = 11/5 \times 4/3 = 44/15$ ؛
- نتیجه $105/176 \leftarrow (7/4) \div (44/15) = 7/4 \times 15/44 = 105/176$
4. $\circ$ $37 \times 10101 = 373737$ ؛ پس $373737/37 = 10101$ ؛ $10101 \times 1/37 = 273$ ؛ $10101 \times 1/91 = 111$ (زیرا $10101 = 91 \times 111$)؛ مجموع $384 \leftarrow 273 + 111$

تمرین

صفحه ۱۴

۲۷

۱۳. در زیر، عدد $7/8$ به صورت مجموع سه کسر متفاوت با صورت ۱ و مخرج طبیعی نوشته شده است:

$$7/8 = 1/2 + 1/4 + 1/8.$$

هر یک از اعداد زیر را به صورت مجموع دو یا چند کسر متفاوت با صورت ۱ و مخرج طبیعی بنویسید.

$13/27$ $73/81$ $57/64$ $351/512$ $823/1024$ $400/729$ $43/48$ $2/35$ $6/23$ $7/12$ $23/15$ $1/6$ $13/18$ $5/121$ $4/13$ $5/6$

پاسخ‌ها یکتا نیستند (هر نمایش را با مخرج مشترک می‌توان بررسی کرد). یک نمایش درست برای هر عدد:

عدد	نمایش	عدد	نمایش
5/6	$1/2 + 1/3$	4/13	$1/4 + 1/18 + 1/468$
5/121	$1/25 + 1/1089 + 1/2475$	13/18	$1/2 + 1/6 + 1/18$
1/6	$1/7 + 1/42$	23/15	$1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/12$
7/12	$1/3 + 1/4$	6/23	$1/4 + 1/92$
2/35	$1/21 + 1/105$	43/48	$1/2 + 1/3 + 1/16$
400/729	$1/2 + 1/27 + 1/162 + 1/243 + 1/729$	823/1024	$1/4 + 1/32 + 1/64 + 1/256 + 1/512 + 1/1024$
351/512	$1/2 + 1/8 + 1/32 + 1/64 + 1/128 + 1/256 + 1/512$	57/64	$1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/64$
73/81	$1/2 + 1/3 + 1/15 + 1/810$	13/27	$1/3 + 1/9 + 1/27$

نمونه بررسی: $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} = (9 + 3 + 1)/18 = 13/18$; $\frac{1}{4} + \frac{1}{18} + \frac{1}{468} = (117 + 26 + 1)/468 = 144/468 = 4/13$
 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = 92/60 = 23/15$; $18 = 13/18$
 لازم است). روش‌های ساخت: برای مخرج توان ۲ از نمایش دودویی صورت
 $(1 + 2 + 4 + 16 + 32 + 256 + 512) = 823$; برای بقیه، هر بار بزرگ‌ترین کسر $1/d$ کوچک‌تر از باقی‌مانده را
 برمی‌داریم و با باقی‌مانده ادامه می‌دهیم.

تمرین

صفحه ۱۵

۲۸

۱۴. برای هر قسمت مسئله‌ای بسازید که عدد داده‌شده در راه‌حل آن مسئله ظاهر شود.

الف) $\frac{3}{5} \times \frac{4}{7}$ ب) $\frac{7}{3} \div \frac{1}{5}$
 ج) $1 - (\frac{3}{4})^2$ د) $\frac{2}{3} - \frac{5}{4}$

نمونه مسئله‌ها (پاسخ هر مسئله هم آمده است):

۱. « $\frac{4}{7}$ یک زمین را باغچه کرده‌ایم و $\frac{3}{5}$ باغچه را گل کاشته‌ایم. گل‌ها چه کسری از کل زمین را گرفته‌اند؟» حل: $\frac{4}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{35}$ از کل زمین.
۲. « $\frac{7}{3}$ لیتر آب داریم و می‌خواهیم آن را در بطری‌های $\frac{1}{5}$ لیتری بریزیم. چند بطری لازم است؟» حل: $\frac{7}{3} \div \frac{1}{5} = \frac{7}{3} \times 5 = \frac{35}{3} = 11 + \frac{2}{3}$ یعنی ۱۱ بطری پر و $\frac{2}{3}$ بطری دیگر.
۳. «مربعی به ضلع ۱ متر داریم و از گوشه آن مربعی به ضلع $\frac{3}{4}$ متر را جدا می‌کنیم. مساحت باقی‌مانده چقدر است؟» حل: $1 - (\frac{3}{4})^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$ متر مربع.
۴. «غواصی در عمق $\frac{2}{3}$ متر زیر سطح آب (ارتفاع $-\frac{2}{3}$) است و $\frac{5}{4}$ متر دیگر پایین می‌رود. ارتفاع او نسبت به سطح آب چقدر می‌شود؟» حل: $-\frac{2}{3} - \frac{5}{4} = -\frac{8}{12} - \frac{15}{12} = -\frac{23}{12}$ متر.

پروژه

صفحه ۱۵

۲۹

۱۵. پروژه. دو نفر می‌خواهند یک سیب را به‌طور عادلانه بین خودشان تقسیم کنند. نفر اول با چاقو سیب را می‌برد و نفر دوم حق انتخاب دارد که کدام تکه را انتخاب کند.

الف) اگر سه نفر بخواهند یک سیب را به‌طور عادلانه بین خودشان تقسیم کنند، راه‌حل چیست؟
 ب) اگر n نفر بخواهند یک سیب را به‌طور عادلانه بین خودشان تقسیم کنند، راه‌حل چیست؟

چرا روش دونفره عادلانه است؟ نفر اول تکه‌ها را طوری می‌برد که به نظر خودش مساوی باشند ($\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$) و هر کدام را بماند راضی است؛ نفر دوم هر تکه را که به نظر خودش بزرگ‌تر یا مساوی است برمی‌دارد، پس او هم حداقل $\frac{1}{2}$ را به نظر خود می‌گیرد.

الف) سه نفر (روش «آخرین کاهنده»): نفر اول تکه‌ای می‌برد که به نظر خودش $\frac{1}{3}$ سیب باشد. نفر دوم اگر آن تکه را بیشتر از $\frac{1}{3}$ می‌داند، کمی از آن می‌برد و برمی‌دارد تا به نظر خودش $\frac{1}{3}$ شود؛ در غیر این صورت دست نمی‌زند. نفر سوم هم همین کار را می‌کند. هر کس آخرین بار تکه را کم کرده (یا اگر هیچ‌کس کم نکرد، نفر اول) آن تکه را برمی‌دارد و می‌رود. دو نفر دیگر سیب باقی‌مانده را به روش دو نفره (یکی می‌برد، دیگری انتخاب می‌کند) تقسیم می‌کنند.

چرا عادلانه است: نفر برنده تکه به نظر خودش دقیقاً $\frac{1}{3}$ می‌گیرد؛ هر یک از دو نفر دیگر تکه برداشته‌شده را حداکثر $\frac{1}{3}$ می‌داند، پس به نظر خودش دست‌کم $\frac{2}{3}$ سیب باقی مانده و در تقسیم دوفره دست‌کم نصف آن، یعنی $\frac{1}{3}$ ، را می‌گیرد.

ب) n نفر: همین کار را ادامه می‌دهیم: نفر اول تکه‌ای می‌برد که به نظر خودش $\frac{1}{n}$ سیب است؛ نفرهای بعدی به ترتیب اگر تکه را بیشتر از $\frac{1}{n}$ بدانند آن را کم می‌کنند. آخرین کاهنده (یا نفر اول اگر کسی کم نکرد) تکه را می‌گیرد و می‌رود. سیب باقی‌مانده را بین $n - 1$ نفر باقی‌مانده به همین روش تقسیم می‌کنند (ابتدا با $\frac{1}{n-1}$ و ...) تا دو نفر آخر بمانند که یکی می‌برد و دیگری انتخاب می‌کند. هر نفر به نظر خودش دست‌کم $\frac{1}{n}$ سیب می‌گیرد: برنده تکه که دقیقاً $\frac{1}{n}$ ؛ هر نفر دیگر، چون تکه برداشته‌شده به نظر او حداکثر $\frac{1}{n}$ بود، به نظر خودش دست‌کم $\frac{1}{n}$ باقی می‌ماند و طبق همین استدلال (استقرا) $\frac{1}{n}$ آن، یعنی $\frac{1}{n}$ کل، را می‌گیرد.

تمرین

صفحه ۱۶

۳۰

۱۶. دستوره‌های زیر را در نظر بگیرید.

A: قرینه و معکوس ورودی

B: ضرب‌در، یک واحد کمتر از قرینه ورودی

C: تقسیم بر قرینه مجذور ورودی

D: منهای معکوس مجذور قرینه ورودی

در هر ستون جدول زیر، یکی از دستوره‌های بالا روی عدد ورودی هر ستون اعمال شده و خروجی به دست آمده است.

الف) اعداد صورتی نوشته شده در جدول فوق درست‌اند. راه حل به دست آمدن هر یک را بنویسید.

ب) خروجی هر ستون از جدول زیر را به دست آورید.

جدول الف

«ستون الف»	«ستون ب»	«ستون ج»	«ستون د»
اولین عدد اول	خروجی ستون «الف»	خروجی ستون «ب»	خروجی ستون «ج»
A	B	C	D
$-1/2$	$1/4$	-4	$-65/16$

جدول ب

«ستون الف»	«ستون ب»	«ستون ج»	«ستون د»
بزرگ‌ترین عدد صحیح منفی	خروجی ستون «الف»	خروجی ستون «ب» به توان ۲	خروجی ستون «ج» به اضافه معکوسش
A	B	C	D

معنای دستورها با ورودی $x: -1/x$: A؛ $x \times (-x - 1)$: B؛ $x \div (-x^2)$: C؛ $x - 1/(-x)^2$: D (یعنی ورودی منهای معکوس مجذور قرینه ورودی).

(الف)

- ستون «الف»: اولین عدد اول ۲ است؛ قرینه ۲ برابر ۲- و معکوس آن $-1/2$ است. $-1/2$
- ستون «ب»: ورودی $-1/2$ ؛ قرینه‌اش $1/2$ است و یک واحد کمتر آن $-1/2 - 1 = -3/2$ ؛ ضرب: $1/4 \cdot (-1/2) \times (-1/2) = 1/4$
- ستون «ج»: ورودی $1/4$ ؛ مجذور $1/16$ و قرینه آن $-1/16$ ؛ $-4 \cdot (1/4) \div (-1/16) = (1/4) \times (-16) = -4$
- ستون «د»: ورودی -4 ؛ قرینه ۴، مجذور ۱۶، معکوس $1/16$ ؛ $-65/16 - 1/16 = -66/16 = -33/8$

(ب)

- ستون «الف»: ورودی بزرگ‌ترین عدد صحیح منفی یعنی -1 ؛ قرینه ۱ و معکوس -1 برابر -1 است؛ A: قرینه و معکوس ورودی: $1 = -1/(-1)$ ← خروجی ۱
- ستون «ب»: ورودی ۱؛ قرینه -1 و یک واحد کمتر آن -2 ؛ $-2 = 1 \times (-2)$ ← خروجی -2
- ستون «ج»: ورودی $4 = (-2)^2$ ؛ $-1/4 = (-2) \div 4$ ← خروجی $-1/4$
- ستون «د»: ورودی $-17/4 = (-4) + (-1/4)$ ؛ مجذور قرینه $289/16$ و معکوسش $16/289$ ؛ $-4977/1156 = -64/1156 - 4913/1156 = -17/4 - 289/16$ ← خروجی $-4977/1156$

الف	ب	ج	د
۱	-2	$-1/4$	$-4977/1156$

۱. بنا به ابلاغ سازمان امور مالیاتی کشور، سقف معافیت‌های مالیاتی در سال ۱۳۹۴ تا حقوق ماهیانه مبلغ یک میلیون و صد و پنجاه هزار تومان (۱,۱۵۰,۰۰۰) است. بر اساس این قانون، تمام کسانی که بیش از یک میلیون و صد و پنجاه هزار تومان و کمتر از هشت میلیون و پنجاه هزار تومان (۸,۰۵۰,۰۰۰) دریافتی ماهیانه دارند، با محاسبه نرخ ۱۰ درصد مالیات پرداخت می‌کنند و کسانی که ماهیانه بیش از هشت میلیون و پنجاه هزار تومان حقوق می‌گیرند، مازاد این مبلغ را به نرخ ۲۰ درصد مالیات پرداخت می‌کنند.

جدول مالیات بر حقوق به صورت زیر است. برای مثال، اگر شخصی ۱۰ میلیون تومان حقوق ماهیانه دریافت کند، باید یک میلیون و هشتاد هزار تومان (۱,۰۸۰,۰۰۰) مالیات پرداخت کند که محاسبه آن به صورت زیر است:

مشمول ۲۰ درصد $1,950,000 = 8,050,000 - 10,000,000$ ؛ مشمول ۱۰ درصد

$20/100 \times 1,950,000 + 10/100 \times 6,900,000 = 8,050,000 - 1,150,000 = 6,900,000$

$390,000 + 690,000 = 1,080,000$.

حقوق چند نفر (به تومان) در زیر آمده است. مالیات بر حقوق هر یک را محاسبه کنید.

الف (۱,۰۰۰,۰۰۰ ب) ۴,۴۲۰,۰۰۰ ج) ۸,۰۰۰,۰۰۰ د) ۱۲,۵۰۰,۰۰۰

جدول مالیات بر حقوق

نرخ مالیات	حقوق ماهیانه (تومان)
معاف	تا سقف ۱,۱۵۰,۰۰۰ تومان
۱۰ درصد	مازاد بر ۱,۱۵۰,۰۰۰ و تا سقف ۸,۰۵۰,۰۰۰ تومان
۲۰ درصد	مازاد بر ۸,۰۵۰,۰۰۰ تومان

○ الف) ۱,۰۰۰,۰۰۰ کمتر از سقف معافیت (۱,۱۵۰,۰۰۰) است: مالیات ۰ تومان.

○ ب) ۴,۴۲۰,۰۰۰ بین ۱,۱۵۰,۰۰۰ و ۸,۰۵۰,۰۰۰ است: مشمول ۱۰٪: $3,270,000 = 4,420,000 - 1,150,000$ ؛

مالیات $327,000 = 3,270,000 \times 10/100$ تومان.

○ ج) ۸,۰۰۰,۰۰۰ هنوز کمتر از ۸,۰۵۰,۰۰۰ است: مشمول ۱۰٪: $6,850,000 = 8,000,000 - 1,150,000$ ؛ مالیات

$685,000 = 6,850,000 \times 10/100$ تومان.

○ د) ۱۲,۵۰۰,۰۰۰ بیشتر از ۸,۰۵۰,۰۰۰ است: مشمول ۲۰٪: $4,450,000 = 12,500,000 - 8,050,000$ ؛ مشمول

۱۰٪: $6,900,000 = 8,050,000 - 1,150,000$ ؛ مالیات

$1,580,000 = 890,000 + 690,000 = 4,450,000 \times 20\% + 6,900,000 \times 10\%$ تومان.

این فایل توسط سایت ایران توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir



۲. بنابر احکام اسلامی تقسیم ارث:

• قبل از اینکه اموال شخص بین وراث تقسیم شود، باید تمام بدهی‌های شخص مرحوم پرداخت شود.
• هر شخص قبل از مرگش می‌تواند $\frac{۱}{۳}$ کل اموال خود را وصیت کند و بقیه اموال، یعنی $\frac{۲}{۳}$ آن، باید بین وراث تقسیم شود.

• از $\frac{۲}{۳}$ اموالی که باید بین وراث تقسیم شود، $\frac{۱}{۸}$ بین همه همسران به طور مساوی تقسیم می‌شود و در صورت زنده بودن پدر و مادر شخص مرحوم، به هر کدام $\frac{۱}{۶}$ اموال به ارث می‌رسد و باقی‌مانده ارث به فرزندان تعلق می‌گیرد به طوری که هر پسر دو برابر هر دختر ارث می‌برد.

وراث باید مطابق جدول زیر، مالیات بر ارث بپردازند.

اکبر آقا قبل از مرگش، خودرویی به قیمت ۱۰۰,۰۰۰,۰۰۰ تومان خرید ولی ۲۰ درصد از قیمت خودرو را پرداخت نکرده بود. اکبر آقا برای $\frac{۱}{۳}$ اموال خود، بعد از ارزش‌گذاری تمام دارایی‌ها و اموالش، وصیت کرد: «یک‌دهم از ثلث اموال را به همسر اولم بدهید. یک‌هشتم آن را به نوه عزیزم صدرا بدهید و بقیه را به انسان‌های خیلی خوب بدهید.»

پدر و مادر مرحوم اکبر آقا هنوز زنده بودند. اکبر آقا ۲ همسر، ۳ پسر و ۲ دختر داشت و اموال وی بیست میلیارد و سیصد و هجده میلیون تومان بود.

الف) قبل از محاسبه مقدار ارث هر شخص، می‌توانید بگویید که ارث صدرا با ارث چه کسی برابر می‌شود؟
ب) به هر کدام از وراث چند تومان ارث می‌رسد؟

ج) اداره مالیات از مرگ اکبر آقا چقدر درآمد کسب کرده است؟

جدول مالیات بر ارث

نرخ مالیات	مقدار ارث (تومان)
۵ درصد	تا سقف ۵ میلیون تومان
۱۵ درصد	مازاد بر ۵ میلیون تومان و تا سقف ۲۰ میلیون تومان
۲۵ درصد	مازاد بر ۲۰ میلیون تومان و تا سقف ۵۰ میلیون تومان
۳۵ درصد	مازاد بر ۵۰ میلیون تومان

قراردادهای حل: «آن» در وصیت را «ثلث اموال» می‌گیریم (یک‌دهم و یک‌هشتم از ثلث)؛ جمع اموال ۲۰,۳۱۸,۰۰۰,۰۰۰ تومان شامل خودرو است؛ بدهی $۲۰,۰۰۰,۰۰۰ = ۲۰\% \times ۱۰۰,۰۰۰,۰۰۰$ تومان است؛ $\frac{۱}{۸}$ و $\frac{۱}{۶}$ نیز از همان $\frac{۲}{۳}$ اموال (سهم وراث) حساب می‌شود؛ پدر و مادر هر کدام $\frac{۱}{۶}$ ، دو همسر روی هم $\frac{۱}{۸}$ و بقیه به فرزندان (هر پسر ۲ سهم و هر دختر ۱ سهم؛ جمعاً $۸ = ۲ \times ۱ + ۳ \times ۲$ سهم) می‌رسد.
گام ۱ - بدهی: $۲۰,۲۹۸,۰۰۰,۰۰۰ = ۲۰,۳۱۸,۰۰۰,۰۰۰ - ۲۰,۰۰۰,۰۰۰$ تومان باقی می‌ماند.

گام ۲ - وصیت: ثلث: $۶,۷۶۶,۰۰۰,۰۰۰ \div ۳ = ۲,۲۹۸,۰۰۰,۰۰۰$. همسر اول: $۶۷۶,۰۰۰,۰۰۰ = ۶,۷۶۶,۰۰۰,۰۰۰ \times ۱/۱۰$. صدرا: $۸۴۵,۷۵۰,۰۰۰ = ۶,۷۶۶,۰۰۰,۰۰۰ \times ۱/۸$. بقیه برای خیریه: $۵,۲۴۳,۶۵۰,۰۰۰ = ۶,۷۶۶,۰۰۰,۰۰۰ - ۶۷۶,۰۰۰,۰۰۰ - ۸۴۵,۷۵۰,۰۰۰$.

گام ۳ - سهم وراثت: $۲/۳$ اموال: $۱۳,۵۳۲,۰۰۰,۰۰۰ = ۲,۲۹۸,۰۰۰,۰۰۰ - ۶,۷۶۶,۰۰۰,۰۰۰$. همسران: $۱/۸$ آن $۱,۶۹۱,۵۰۰,۰۰۰ =$ و هر همسر $۸۴۵,۷۵۰,۰۰۰$. پدر: $۲,۲۵۵,۳۳۳,۳۳۳/۳ = ۱۳,۵۳۲,۰۰۰,۰۰۰ \times ۱/۶$ و مادر: همین مبلغ. فرزندان: $۱۳/۲۴ = ۱/۶ - ۱/۶ - ۱/۸ = ۱$ یعنی $۷,۳۲۹,۸۳۳,۳۳۳/۳ = ۱۳,۵۳۲,۰۰۰,۰۰۰ \times ۱۳/۲۴$; هر سهم $۹۱۶,۲۲۹,۱۶۶/۷ = ۸ \div$; هر پسر $۱,۸۳۲,۴۵۸,۳۳۳/۳$ و هر دختر $۹۱۶,۲۲۹,۱۶۶/۷$.

الف) ارث هر همسر $۱/۲۴ = ۲ \div (۲/۳ \times ۱/۸ + ۱/۳) = ۱/۲۴$ صدرا است و ارث صدرا $۱/۸ \times ۱/۳$ کل اموال است. پس ارث صدرا با ارث هر یک از دو همسر اکبر آقا برابر است ($۸۴۵,۷۵۰,۰۰۰$ تومان).

ب) سهم هر نفر (تومان)

شخص	از ارث	از وصیت	جمع
همسر اول	۸۴۵,۷۵۰,۰۰۰	۶۷۶,۰۰۰,۰۰۰	۱,۵۲۲,۳۵۰,۰۰۰
همسر دوم	۸۴۵,۷۵۰,۰۰۰	—	۸۴۵,۷۵۰,۰۰۰
پدر	۲,۲۵۵,۳۳۳,۳۳۳/۳	—	۲,۲۵۵,۳۳۳,۳۳۳/۳
مادر	۲,۲۵۵,۳۳۳,۳۳۳/۳	—	۲,۲۵۵,۳۳۳,۳۳۳/۳
هر پسر (۳ نفر)	۱,۸۳۲,۴۵۸,۳۳۳/۳	—	۱,۸۳۲,۴۵۸,۳۳۳/۳
هر دختر (۲ نفر)	۹۱۶,۲۲۹,۱۶۶/۷	—	۹۱۶,۲۲۹,۱۶۶/۷
صدرا (نوه)	—	۸۴۵,۷۵۰,۰۰۰	۸۴۵,۷۵۰,۰۰۰
خیریه	—	۵,۲۴۳,۶۵۰,۰۰۰	۵,۲۴۳,۶۵۰,۰۰۰

بررسی: مجموع همه سهم‌ها $۲۰,۲۹۸,۰۰۰,۰۰۰ =$.

ج) مالیات هر نفر را طبق جدول روی مبلغی که او دریافت می‌کند حساب می‌کنیم (خیریه مالیات نمی‌دهد). همه مبلغ‌ها بیشتر از ۵۰ میلیون‌اند، پس: $۲۵۰,۰۰۰ = ۵\% \times ۵,۰۰۰,۰۰۰$ ، $۲,۲۵۰,۰۰۰ = ۱۵\% \times ۱۵,۰۰۰,۰۰۰$ ، $۷,۵۰۰,۰۰۰ = ۲۵\% \times ۳۰,۰۰۰,۰۰۰$ و روی مازاد بر ۵۰ میلیون ۳۵ درصد؛ یعنی $۱۰,۰۰۰,۰۰۰ + ۳۵\% \times (x - ۵۰,۰۰۰,۰۰۰) =$ مالیات

شخص	مالیات (تومان)
همسر اول	۵۲۵,۳۲۲,۵۰۰
همسر دوم	۲۸۸,۵۱۲,۵۰۰
پدر	۷۸۱,۸۶۶,۶۶۶,۷
مادر	۷۸۱,۸۶۶,۶۶۶,۷
هر پسر	۶۳۳,۸۶۰,۴۱۶,۷
هر دختر	۳۱۳,۱۸۰,۲۰۸,۳
صدرا	۲۸۸,۵۱۲,۵۰۰

۱. دو همسر و صدرا: $۵۲۵,۳۲۲,۵۰۰ + ۲۸۸,۵۱۲,۵۰۰ + ۲۸۸,۵۱۲,۵۰۰ = ۱,۱۰۲,۳۴۷,۵۰۰$

۲. پدر و مادر: $۲ \times ۷۸۱,۸۶۶,۶۶۶,۷ = ۱,۵۶۳,۷۳۳,۳۳۳,۳$

۳. سه پسر: $۳ \times ۶۳۳,۸۶۰,۴۱۶,۷ = ۱,۹۰۱,۵۸۱,۲۵۰$

۴. دو دختر: $۲ \times ۳۱۳,۱۸۰,۲۰۸,۳ = ۶۲۶,۳۶۰,۴۱۶,۷$

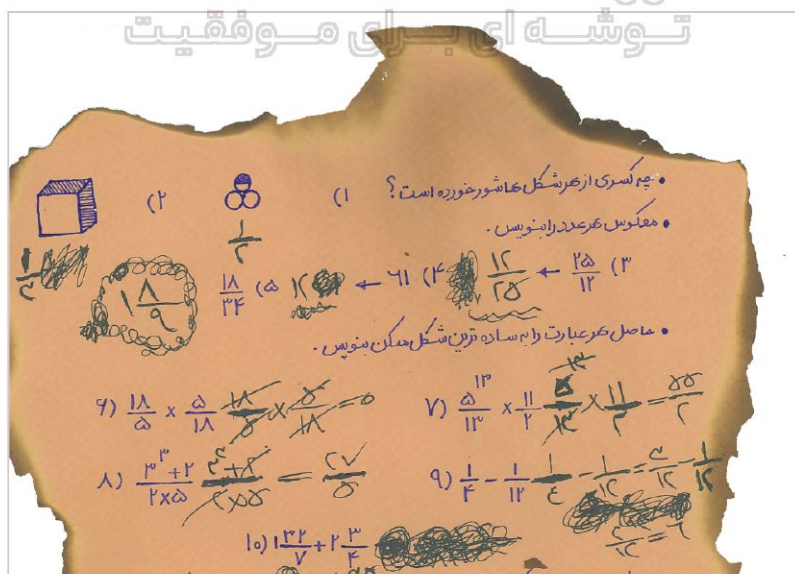
جمع این چهار مبلغ $۵,۱۹۴,۰۲۲,۵۰۰$ تومان است. پاسخ: اداره مالیات حدود $۵,۱۹۴,۰۲۲,۵۰۰$ تومان (حدود پنج میلیارد و صد و نود و چهار میلیون تومان) درآمد کسب کرده است. (اگر صدرا و وصیت همسر اول را مشمول مالیات بر ارث ندانیم، مالیات وراثت $۴,۶۶۸,۷۰۰,۰۰۰$ تومان می شود).

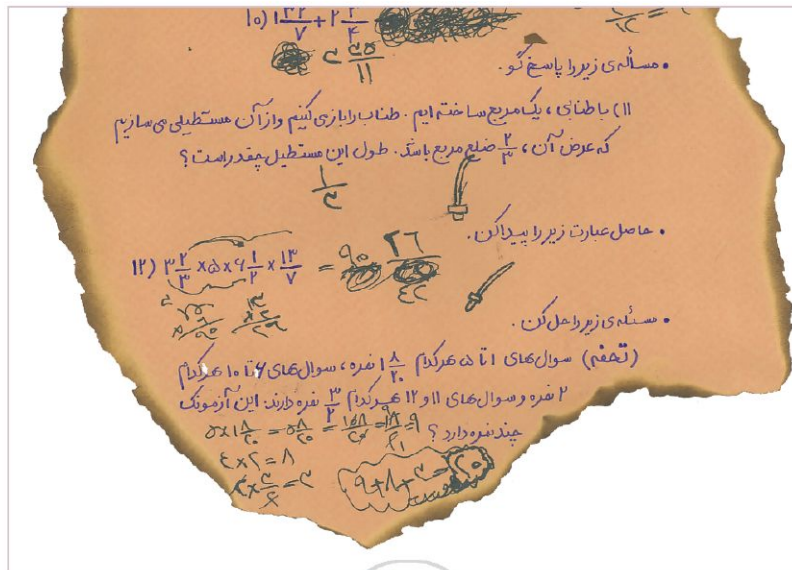
مسئله کاربردی

صفحه ۲۰

۳۳

۳. صدرا یک صندوقچه قدیمی در زیرزمین خانه اکبر آقا پیدا کرد که برگه زیر، در آن بود. این برگه را تصحیح کنید.





پاسخ درست هر سؤال برگه (با فرض خواندن سؤال‌ها همان‌طور که در تصویر آمده):

1. ☐ چه کسری از هر شکل هاشور خورده است؟ (۱) سه دایره هم‌اندازه که نیمی از دایره بالایی هاشور خورده: $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ (نه $\frac{1}{2}$). (۲) مکعب با ۶ وجه که ۲ وجه (بالا و راست) هاشور خورده: $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (نه $\frac{1}{2}$).
2. ☐ معکوس هر عدد را بنویس: (۳) معکوس $\frac{25}{12}$: $\frac{12}{25}$. (۴) معکوس $\frac{61}{61}$: $\frac{1}{61}$. (۵) معکوس $\frac{18}{34}$: $\frac{34}{18} = \frac{17}{9} = 1 + \frac{8}{9}$.
3. ☐ حاصل را به ساده‌ترین شکل بنویس: (۶) $\frac{18}{5} \times \frac{5}{18} = 1$. (۷) $\frac{55}{26} \times \frac{11}{2} = \frac{55}{26} \times \frac{11}{2}$ (نمی‌توان ۱۳ را با ۵ یا ۱۱ ساده کرد؛ پس $\frac{55}{26}$ غلط است). (۸) $\frac{29}{10} = \frac{27}{10} + \frac{2}{10} = \frac{(27+2)}{10} = \frac{(2^3+2)}{(2 \times 5)} = \frac{(2^3+2)}{(2 \times 5)}$. (۹) $\frac{1}{6} = \frac{2}{12} = \frac{3}{12} - \frac{1}{12} = \frac{3}{12} - \frac{1}{12} = \frac{2}{12}$. (۱۰) $\frac{3}{4} + 2 + \frac{32}{7} + 1$ (عدد مخلوط $\frac{32}{7}$ یعنی $\frac{39}{7} + \frac{11}{4} = \frac{156}{28} + \frac{77}{28} = \frac{233}{28} = 8 + \frac{9}{28}$: $\frac{23}{4} = \frac{11}{4} + 1 + \frac{32}{7} = \frac{39}{7}$).
4. ☐ مسئله (۱۱): محیط مربع $4a$ است (ضلع a). مستطیل همین طناب را دارد و عرضش $\frac{2}{3}a$ است؛ نصف محیط $2a$ است، پس طول $\frac{4}{3}a = 4/3 a = 2a - \frac{2}{3}a$. یعنی طول مستطیل $\frac{4}{3}$ ضلع مربع است (نه $\frac{1}{3}$ یا $\frac{1}{4}$).
5. ☐ (۱۲) $\frac{11}{3} \times \frac{13}{2} \times \frac{13}{7} = \frac{11}{3} \times \frac{13}{2} \times \frac{13}{7} = \frac{3 \times 2 \times 7}{3 \times 2 \times 7} \times \frac{11 \times 13 \times 13}{1} = \frac{11 \times 13 \times 13}{1} = 1871$ (عدد مخلوط را باید ابتدا به کسر تبدیل کرد؛ ضرب جزء صحیح در جزء صحیح و کسر در کسر درست نیست).
6. ☐ مسئله تحفه: سؤال‌های ۱ تا ۵ هر کدام $\frac{7}{5} = \frac{14}{10}$ نمره: $5 \times \frac{7}{5} = 7$. سؤال‌های ۶ تا ۱۰ هر کدام ۲ نمره: $5 \times 2 = 10$. سؤال‌های ۱۱ و ۱۲ هر کدام $\frac{3}{2}$ نمره: $2 \times \frac{3}{2} = 3$. مجموع: $7 + 10 + 3 = 20$. این آزمونک ۲۰ نمره دارد.